

Exercice 1: (11 points)

A. Soit g la fonction définie sur $[-1; 4[$ par $g(x) = \frac{5}{4-x} - 2$.

- 0.5 ① Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[-1; 4[$.
- 0.75 ② Dresser le tableau de variation de g sur $[-1; 4[$.
- 1 ③ Montrer que g est une bijection de $[-1; 4[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
- ④ Soit g^{-1} la fonction réciproque de g .
- 0.5 a) Déterminer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(-1)$.
- 0.75 b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} .
- 0.5 c) Déterminer $g^{-1}([-1; 3])$.
- 0.75 d) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout réel x de I .
- ⑤ Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 0.75 Tracer la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère.

B. On considère la suite réelle U définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g^{-1}(u_n) ; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 0.25 ① Calculer u_1 .
- 0.75 ② Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $-1 \leq u_n \leq 3$.
- 0.5 ③ Montrer que la suite U est croissante.
- 1 ④ En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

C. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{3+4x}{2+x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3-x}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$

- 0.75 ① Etudier la continuité de f en -1 .
- 0.75 ② Etudier la dérivabilité de f en -1 .
- 0.5 ③ Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- ④ Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
- 0.5 a) Montrer que (D) est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
- 0.5 b) Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.

Exercice 2: (3 points)

1 On considère l'équation (E): $11x + 8y = 79$ où x et y sont deux entiers relatifs.

0.25 a) Vérifier que $(5, 3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

1.75 b) Montrer que l'ensemble des solutions entières de (E) est $S = \{(5 + 8k, 3 - 11k); k \in \mathbb{Z}\}$.

2 Le prix total de 41 cadeaux répartis en trois vitrines d'un magasin est 480 dinars.

Le prix d'un cadeau de la première vitrine est 48 dinars, celui de la deuxième vitrine est 36 dinars et celui de la troisième vitrine est 4 dinars. Déterminer le nombre de cadeaux dans chaque vitrine.

1

Exercice 3: (6 points)

0.5 1 Vérifier que $(3 - 2i)$ est une racine carrée de $(5 - 12i)$.

1.5 2 Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation : $iz^2 + (5 - 2i)z - 2 - 4i = 0$.

3 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2 + 4i$ et $z_C = 4 + i$.

0.25 a) Placer les points A, B et C.

0.5 b) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

4 Soit I le milieu du segment [AC] et D le point d'affixe $2 - 2i$.

0.5 a) Déterminer l'affixe de I.

0.75 b) Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

1 c) Montrer que ABCD est un losange de centre I.

1 5 Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que
$$\begin{cases} |z - 2 - i| = 3 \\ |z - i| = |z - 4 - i| \end{cases}$$

Annexe à rendre avec la copie

