Lycée secondaire Zannouch **Date: 9 mai 2013** **Prof: Mr.Smairy.J**	**Devoir de synthèse de mathématiques n°3** **Niveau: 4ème année (maths)** ☼ ☼ ☼ **Durée: 4 heures**

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose **150** romans policiers et **50** biographies.
40% des écrivains de romans policiers sont français et **70%** des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les **200** ouvrages.

1) La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :
  a) 0,4 **b)** 0,75 **c)** $\frac{1}{150}$

2) Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que son écrivain soit français est :
  a) 0,3 **b)** 0,8 **c)** 0,4

3) La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :
  a) 0,15 **b)** 0,4 **c)** 0,3

4) La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
  a) 0,9 **b)** 0,7 **c)** 0,475

5) La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
  a) $\frac{4}{150}$ **b)** $\frac{12}{19}$ **c)** 0,3

6) Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :
  a) $1-(0,25)^{20}$ **b)** $(0,75)^{20}$ **c)** $(\frac{1}{150})^{20}$

Exercice 2 : (3 points)

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = xe^{-x}$.

1) Démontrer que la fonction g définie, sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ est une solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' + y = 0$.

3) Démontrer qu'une fonction h, dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $h-g$ est solution de (E_0).

4) Déterminer la fonction f, solution de (E), qui prend la valeur e^{-1} en 1.

Exercice 3 : (3 points)

1) On considère l'équation (E): $11x + 8y = 79$ où x et y sont deux entiers relatifs.

  a) Vérifier que si (x , y) est une solution de l'équation (E) alors $y \equiv 3[11]$.

  b) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).

2) Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E).

3) Le prix total de **41** cadeaux réparties en trois vitrines d'un magasin est **480** dinars.

Le prix d'un cadeau de la première vitrine est **48** dinars, celui de la deuxième vitrine est **36** dinars et celui de la troisième vitrine est **4** dinars. Déterminer le nombre de cadeaux dans chaque vitrine.

Exercice 4 : (5 points)

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.

2) On rapporte le plan complexe à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+i$, i et $2+2i$.

a) Montrer qu'il existe une seule similitude directe f qui envoie O en A et B en C.

b) Déterminer l'angle et le rapport de f.

c) Déterminer l'application complexe associée à f.

d) Montrer que le point I(1 , -1) est le centre de f.

3) Montrer que tout point $M(x,y)$ d'image $M'(x',y')$ par f, on a : $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = y - x + 1 \end{cases}$

4) Soit **P** l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan vérifiant : $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y - 4 = 0$ et **P'** l'image de **P** par f.

a) Montrer qu'une équation cartésienne de P' est : $y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$

b) Montrer que P est une parabole dont on précisera le sommet S, le foyer F et la directrice D.

Exercice 5 : (6 points)

1) Soit (I_n) la suite réelle définie, sur $\mathbb{N}^*$, par $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$.

a) Calculer I_1.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$.

c) En déduire que $I_2 = e - 2$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + 2\ln x$.

a) Montrer que g est une bijection strictement croissante de $]0\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $g(1)$ puis donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur $]0\,,+\infty[$.

3) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = x + (\ln x)^2 - \ln x$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

b) Etudier la branche infinie de Cf au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que, pour tout réel x de $]0\,,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

d) Dresser le tableau de variations de f et tracer C_f.

4) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie D du plan définie par $D = \{M(x,y)\ ;\ 1 \le x \le e \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}$.

5) On considère le vecteur $\vec{k}$ tel que $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit un repère orthonormé direct de l'espace et on désigne par C l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y = f(x) - x$ et $1 \le x \le e$.

Calculer le volume du solide S obtenu par la rotation de C autour de l'axe $(O,\vec{i})$.