Exercice n°1 :

Pour chaque question, il ya exactement deux propositions correctes.

1) Les suites suivantes sont convergentes :

a) $\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\right)_{n\in IN}$ b) $\left(\frac{2n^2+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in IN}$ c) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n\in IN}$ d) $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n\in IN}$.

2) Deux suites sont définies pour n>0 par les relations : $X_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et $Y_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)$

   a) Les suites (X_n) et (Y_n) sont toutes les deux croissantes.

   b) $X_3=\frac{19}{20}$ et $Y_3=\frac{37}{60}$

   c) Les suites (X_n) et (Y_n) ne sont pas majorées.

   d) Les suites (X_n) et (Y_n) sont adjacentes.

3) Une suite est définie sur IN par : : $\begin{cases} U_0=1,5 \\ U_{n+1}=2U_n-1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

   a) Pour tout n de IN $U_n>0$.

   b) La suite (U_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations y = x et y = 2x-1.

   c) La suite (V_n) définie par : $V_n=U_n-1$ est géométrique.

   d) La suite (V_n) est majorée.

Exercice n°2 :

Soit S la suite définie sur IN par : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

1) a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $S_n\geq\frac{n}{\sqrt{n}}$.

   b) La suite S est- elle convergente ?

2) Vérifier que pour tout entier $n\geq 1$; $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

3) On considère les suites U et V définies sur IN* par $U_n=2\sqrt{n}-S_n$ et $V_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+U_n$.

   a) Démontrer que les suites U et V sont adjacentes. Que peut-on déduire ?

   b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{2\sqrt{n}}$.

Exercice n°3 :

Soit a et b deux nombres réels vérifiant 0<a<b. On définies les suites (U_n) et (V_n) par :

$U_0=a, V_0=b, U_{n+1}=\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}, V_{n+1}=\frac{U_n+V_n}{2}$

1) Vérifier que (U_n) et (V_n) sont strictement positives.

2) On pose pour tout entier naturel n $W_n = U_n - V_n$.

a) Montrer que pour tout entier n , $W_n>0$ puis $0<W_{n+1}<\frac{1}{2}W_n$.

b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0<W_n<\frac{b-a}{2^n}$.

3) Démontrer alors que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercice n°4 :

Soit la suite U définie par : $U_0=1$; $U_{n+1}=1+\frac{1}{U_n}$.

1) Montrer que pour tout $n\in \mathbb{N}, U_n\geq 1$.

2) Montrer que $1+\frac{1}{x}$ admet dans $\left]\frac{3}{2},2\right[$ une solution unique α.

3) a) Montrer que $U_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{\alpha U_n}(U_n-\alpha)$. En déduire que $U_{n+2}-\alpha=-\frac{1}{\alpha^2 U_{n+1}U_n}(U_n-\alpha)$.

b) Prouver que $U_{n+2}-\alpha$ et $U_n-\alpha$ sont de même signe.

4) Soient V et W les suites définies par : $V_n=U_{2n}$ et $W_n=U_{2n+1}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout n , $V_n\leq\alpha\leq W_n$.

b) Montrer que $\frac{1}{\alpha^2 U_{n+1}U_n}<1$. En déduire que $V_n<V_{n+1}$ et $W_{n+1}<W_n$.

c) Prouver que U et V sont convergentes.

5) a) Montrer que pour tout n, $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$ et $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Déterminer alors la limite de la suite U.

Exercice n°5 :

Pour tout n>0, on définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ la fonction f_n par : $f_n(x)=x-n\tan x$.

1) a) Montrer que pour tout n>0, l'équation $f_n(x)=-n$ admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution qu'on note U_n.

b) Vérifier que pour tout n>0 , $U_n\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\tan(U_n)=\frac{1+U_n}{n}$.

2) a) Montrer que pour tout n>0 et pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $1+f_{n+1}(x)<f_n(x)$.

b) Déduire alors que la suite U est strictement décroissante, et quelle converge vers une limite que l'on précisera.