Exercice n°1 :

I. Donner la réponse exacte.

1) Soit la suite U définie par son premier terme U_0 et $U_{n+1} = 2U_n + 3$.
   a) U est une suite géométrique.
   b) La suite V définie par $V_n = U_n + 3$ est une suite géométrique.
   c) Pour tout $n \in IN$, $U_n = 2^n(U_0 + 3) - 3$.
2) On considère les suites U , V et W telles que pour tout n, on a : $U_n \le V_n \le W_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors :
   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ c) (W_n) n' a pas de limite.
3) Soit la suite U définie par : $\forall n \in IN^* \; U_n = (-1)^n$ est :
   a) Bornée b) convergente c) croissante.
4) Soit la suite U définie par : $\forall n \in IN^* \; U_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
   a) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = 0$ b) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = 1$
5) Soit la suite U définie par : $\forall n \in IN \; U_n = \frac{\sin n}{n^2+1}$ alors on a :
   a) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = 1$ c) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = 0$

II. Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) U converge ssi U^2 converge.
2) Si U est bornée alors U converge.
3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$.
4) Deux suites qui convergent vers une même limite sont adjacentes.
5) Si $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ alors U converge vers 1.
6) La suite $W_n = \frac{1}{n} + \sin(n)$ est convergente.
7) La suite T définie pour tout n>0 $T_n = \frac{2n + (-1)^n}{n}$ converge vers 2.

Exercice n°2 :

Soit (U_n) la suite numérique définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$

1) a) Montrer que $U_n \in [0,4]$, $\forall n \in IN$.
   b) Montrer que (U_n) est convergente. Déterminer sa limite.
2) a) Montrer $\forall n \in IN$, $4 - U_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - U_n)$
   b) Retrouver la limite de (U_n).

Exercice n°3 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $U_{n+1} = U_n(1 - U_n)$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

2) Montrer que (U_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°4 :

Soit α un réel tel que $\alpha \in [0,1]$. Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3+(1-\alpha^2)U_n^2} \end{cases}$

1) On suppose dans cette question $\alpha = 0$.
   a) Calculer U_1, U_2 et U_3.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \sqrt{3n}$.
2) On suppose dans cette question $\alpha \neq 0$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \le U_{n+1}$. Déduire que la suite U est convergente..
3) Soit (V_n) la suite réelle définie sur IN par : $V_n = U_n^2 - \frac{3}{\alpha^2}$.
   a) Montrer que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et α.
   c) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k^2$. Calculer S_n en fonction de n et α.

Exercice n°5 :

Soit α un réel appartenant à]0,1[.On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n de IN , on a : $U_n \ge 1$.
   b) Montrer que (U_n) est une suite décroissante.
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.
2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera son premier terme et sa raison.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

Exercice n°6 :

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = a \\ 1+U_{n+1} = \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \end{cases}$

1) Pour quelles valeurs de a la suite U est constante.

2) On suppose dans la suite de l'exercice que $a=-\frac{1}{2}$

   a) Montrer que pour tout $n\in \text{IN}$, $-1<U_n<0$.

   b) Montrer que la suite U est décroissante et convergente.

3) a) Montrer que pour tout $n\in \text{IN}$, $0<1+U_{n+1}\leq \frac{2}{\sqrt{5}}(1+U_n)$.

   b) Déduire que pour tout $n\in \text{IN}$ $0<1+U_{n+1}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$.

   c) Déduire la limite de la suite U.

4) Soit $V_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}U_k$. Trouver un encadrement de la suite V_n puis déterminer sa limite.

Exercice n°7 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{3}{\sqrt{6-U_n{}^2}} \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2.

2) a) Montrer que pour tout n de IN , on a : $0\leq U_n<\sqrt{3}$.

   b) Montrer que (U_n) est une suite croissante.

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite.

3) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n=\frac{U_n{}^2}{3-U_n{}^2}$.

   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera son premier terme et sa raison.

   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

Exercice n°8 :

Soit la suite U définie par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=2+\dfrac{1}{U_n^2} \end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall n\in \text{IN}$ $U_n\geq 1$ et que U_n est croissante.

   b) Justifier que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n=+\infty$.

2) Soit V la suite définie par $\forall n\in \text{IN}$ $V_n=2+\frac{1}{U_n^2}$.

   a) Etudier la monotonie de V.

   b) Déduire que V est convergente.

3) a) Montrer que $\forall n\in \text{IN}$ $U_n\geq 1+2n$.

b) Retrouver alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} V_n$.

4) a) Montrer que $\forall n \in IN^* \quad 2 \le V_n \le 2 + \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k$. Montrer que S est convergente. (Remarquant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).

Exercice n°9 :

On définit deux suites (U_n) et (V_n) par : $U_1 = 12, V_1 = 1, U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}, V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$

1) Pour tout entier n ≥ 1, on pose $W_n = U_n - V_n$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer W_n en fonction de n.
2) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que la suite (V_n) est croissante.
3) Pour tout entier n ≥ 1, démontrer que $U_n \ge V_n$. En déduire que $U_1 \ge U_n \ge V_n \ge V_1$.
4) Pour tout entier n ≥ 1, on pose $T_n = 3U_n + 8V_n$. Démontrer que (T_n) est une suite constante.
5) En déduire les expressions de U_n et V_n en fonction de n, puis les limites de (U_n) et (V_n).

Exercice n°10 :

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)U_{n-1} \end{cases}$ pour tout n de IN^*.

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $U_n > 0$.
   b) Exprimer U_n en fonction de n.
2) On pose : pour tout n de IN , $V_n = \sqrt{n}U_n$ et $W_n = \sqrt{n+1}U_n$
   a) Montrer que la suite V est croissante et la suite W est décroissante.
   b) En déduire que pour tout n de IN^* $\frac{1}{4\sqrt{n}} \le U_n \le \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.
   c) Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite.
   d) Montrer que les suites U et W sont adjacentes.