EXERCICE N°1 (6pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On nomme J le point d'affixe i

À tout point M d'affixe z différent de i, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = i + \dfrac{2}{\bar{z}+i}$

1. a. Déterminer l'affixe de l'image du point I d'affixe 1.
   b. Déterminer l'affixe de l'image du point A d'affixe 1+ i.
2. montrer que M' = M $\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre J et de rayon $\sqrt{2}$
3. a. vérifier que $\dfrac{z'-i}{z-i} \in \mathbb{R}$ Interpréter géométriquement ce résultat.
   b. montrer que $\forall$ M$\neq$ J on a : JM. JM' = 2
   Déduire que si M $\in \mathscr{C}$ (J,2),alors M' appartient un cercle fixe que l'on précisera
   c. soit M un point de $\mathscr{C}$ (J,2),construire alors son image M'
4. Montrer que z'$\in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$
   Construire alors l'image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point J
5. soit maintenant $z = 1+i+e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
   a) déterminer et construire l'ensemble E des points M(z) lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
   b) montrer que lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ M' appartient à une droite fixe que l'on précisera

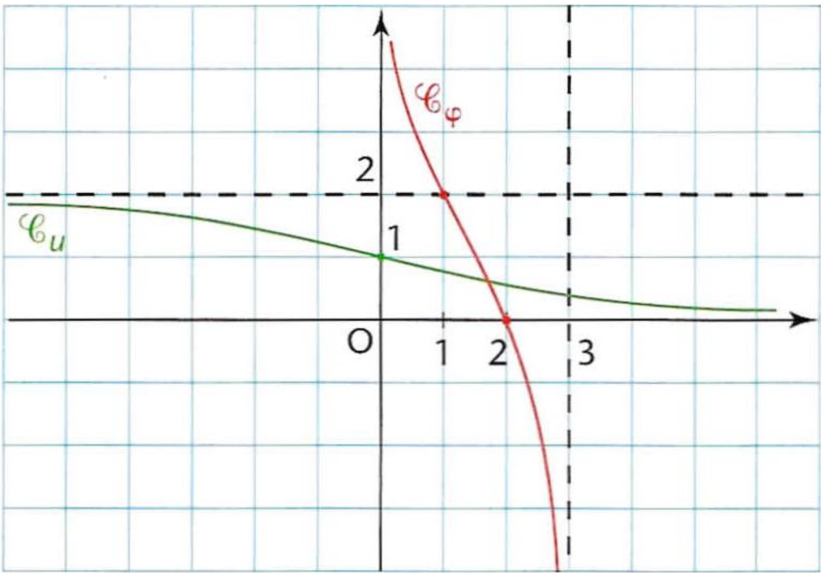
EXERCICE N°2 (5pts)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.
   La suite (v_n) est-elle monotone ?
   c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.
   a. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
   b. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
   c. retrouver alors la limite de la suite (v_n).

EXERCICE N°3 (4pts)

$\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_\varphi$ sont les courbes représentatives des fonctions u et φ



1. f = φ o u, par lecture graphique déterminer f(0), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. g = u o φ , par lecture graphique déterminer g(2) , $\lim\limits_{x\to3^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$
3. déterminer $\varphi(]0,2[)$ et u([0,+∞[)

EXERCICE N°4 (5pts)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x})+x & si\ x<0 \\ x-\sqrt{x^2+2x} & si\ x\geq 0\end{cases}$

1. déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. a) montrer que pour tout x< 0, on a : $x-x^2\leq f(x)\leq x+x^2$

   b) en déduire $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

   c) montrer que f est continue en 0

3. montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution $\alpha\in\left]\frac{-6}{\pi},\frac{-2}{\pi}\right[$

4. sachant que f est décroissante sur [0,+∞[
déterminer alors l'image par f de l'intervalle [0,+∞[