LYCEE DE MATEUR
2015-2016

Série
Suites Numériques

HAMDA ABBES
4ème MATHS

LYCEE DE MATEUR
2015-2016

1 Généralités sur les limites

Exercice 1.1 (★)
Etudier $\lim\limits_{\infty} \mathrm{E}(u_n)$ dans le cas où $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell$.

Exercice 1.2 (★)
Limite des suites de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$ et $v_n = \sqrt[n]{n!}$.

Exercice 1.3 (★)
Soit (u_n) une suite dont les suites extraites $(a_n = u_{2n})$ et $(b_n = u_{3n})$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que $\ell = \ell'$.

Exercice 1.4 (★★)
On se donne une suite numérique (u_n).
On suppose que les trois suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes.
Montrer que la suite (u_n) converge.

2 Limite par encadrement

Exercice 2.1 (★)
Que dire de deux suites (u_n) et (v_n) de $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{\infty} u_n v_n = 1$?

Exercice 2.2 (★)
Limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}(1! + 2! + \cdots + n!)$.

Exercice 2.3 (★★★)
Limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$.

Exercice 2.4 (✯)

Limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

Exercice 2.5 (✯)

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(2x) + \cdots + \mathrm{E}(nx))$.

Exercice 2.6 (✯✯)

Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

3 Limites des suites monotones

Exercice 3.1 (✯✯)

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{kn}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas sa limite).

Exercice 3.2 (✯✯✯)

On considère la suite de terme général $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}$.

Montrer que pour tout n, on a l'inégalité $u_{n+1}^2 \leqslant 1 + \sqrt{2}\, u_n$.

La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 3.3 (✯✯✯)

Soit (u_n) une suite bornée telle que : $\forall\, n \geqslant 1,\ 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n+1}$.

Montrer que cette suite est convergente.

Exercice 3.4 (✯✯)

On se donne une suite réelle (u_n) et on pose $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{\infty} v_n = \ell$.
2. Vérifier sur un exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si la suite (u_n) est monotone, alors la réciproque est vraie.

4 Suites adjacentes

Exercice 4.1 (⋆⋆)

Montrer que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.

Montrer que leur limite commune est irrationnelle.

Exercice 4.2 (⋆⋆⋆)

Trouver la condition sur les réels u_0, v_0, $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$ pour que les suites (u_n) et (v_n) définies par les récurrences $u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu}$ soient adjacentes.

Dans le cas général, les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes, et vers quelle limite ?

Exercice 4.3 (⋆⋆)

Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple ($u_0 = a > 0, v_0 = b > 0$) et par les relations $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Exercice 4.4 (⋆⋆)

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout n, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 4.5 (⋆⋆)

Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$ est convergente et que sa limite est un irrationnel.

5 Suites arithmétiques ou géométriques

Exercice 5.1 (⋆)

Soient a, b et c trois réels distincts, a étant non nul.

On suppose que a, b, c sont en progression arithmétique et que $3a, b, c$ sont en progression géométrique.

Que dire de la raison de cette progression géométrique ?

Exercice 5.2 (⋆)

On suppose que les réels a, b, c sont en progression arithmétique.

Montrer qu'il en est de même des réels $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ca + a^2$ et $a^2 + ab + b^2$.

Exercice 5.3 (✯)
Soient a, b deux réels, et une suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = n(an + b)$.
Montrer que la suite (u_n) est arithmétique. Calculer u_n.

Exercice 5.4 (✯✯)
Soit une suite (u_n) telle que, pour tout $n \geqslant 2$, $(n+1)^2 u_{n+1} - (n-1)^2 u_n + n = 0$ (E).

1. Montrer qu'il existe k tel que si on pose $v_n = u_n - k$ alors : $\forall n \geqslant 2 : (n+1)^2 v_{n+1} = (n-1)^2 v_n$.
2. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n.
3. Que se passe-t-il si la relation (E) est vraie pour $n = 1$?

Exercice 5.5 (✯)
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $a \neq 1$.c On pose $u_0 > 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + a u_n}{a + u_n}$.

1. Vérifier que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{-1 + u_n}{1 + u_n}$ est géométrique de raison $\dfrac{a-1}{a+1}$.
2. En déduire $\lim\limits_{\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{\infty} u_n$.

6 Suites définies par récurrence

Exercice 6.1 (✯✯)
Etudier la suite (u_n) définie par u_0 réel et $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$.

Exercice 6.6.2 (✯✯)
Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$.

Exercice 6.3 (✯✯)
Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

Exercice 6.4 (✯✯)
Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple $(u_0 > 0, v_0 > 0)$ et par les relations de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}$.

Exercice 6.5 (✯✯✯)
Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq -\frac{1}{2}$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$.

Exercice 6.6 (✯✯)
Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{a}{u_n})$, où $a > 0$ est donné.

Exercice 6.7 (★★★)

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 1$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{-1+u_n}$.

Exercice 6.8 (★★)

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Exercice 6.9 (★★)

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{8 + \dfrac{u_n^2}{2}}$.

Exercice 6.10 (★★★)

Etudier la suite (u_n) définie par par $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2u_n}$.

Exercice 6.11 (★)

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 6.12 (★★★★)

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{14}(3u_n^3 - 3u_n^2 - 4u_n)$.

Exercice 6.13 (★★★)

On définit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x-4)/2 & \text{sur }]-\infty, -2] \\ 3(x+1) & \text{sur } [-2, -1] \\ 2(x+1)/3 & \text{sur } [-1, +\infty[\end{cases}$

On définit une suite (u_n) par la donnée de u_0 et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Etudier la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0.

Exercice 6.14 (★★)

Soit a un réel strictement positif, différent de 1.

On définit une suite (u_n) de la manière suivante :

- u_0 est strictement compris entre a et 1.
- Pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + a - \dfrac{a}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier n, le réel u_n est strictement compris entre a et 1.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.