EXERCICE N 1

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{6+2U_n}{4+U_n}$ pour tout entier naturel n.

1. (a) Calculer U_1 et U_2 .
   (b) Justifier que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

   (a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :$U_{n+1} = 3 - \dfrac{6}{4+U_n}$
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :$-3 < U_n < 2$
   (c) Montrer que la suite U est croissante.
   (d) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \dfrac{-2+U_n}{3+U_n}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : .$U_n = \dfrac{2+3V_n}{1-V_n}$.
   (b) Montrer que la suite V est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$.
   (c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   (d) Retrouver alors $\lim U_n$

EXERCICE N 2

Soient U et V les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :$U_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $V_n = U_n + \dfrac{1}{n!}$

1. Montrer que U est croissante et que V est décroissante.
2. Montrer que U est majorée par V_1 et que V est minorée par U_1 .
3. En déduire que les suites U et V sont convergentes.

EXERCICE N3

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par :$U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$.

1. Montrer que la suite U est croissante.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq 1$.
   (c) En déduire que la suite U est convergente.

EXERCICE N 4

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -1$ et $U_{n+1} = \dfrac{-1+U_n}{-3+4U_n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{4x-3}$
   (a) Construire la courbe représentative ζ de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.
   (b) Montrer que la droite $D : y = x$ est tangente à la courbe ζ et déterminer l'abscisse α de leur point de contact.
   (c) Placer, sur l'axe des abscisses, les trois premiers termes de la suite U .
   (d) Que peut on conjecturer pour la limite de la suite U ?
2. Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{1}{U_n - \alpha}$.
   (a) Montrer que V_n est une suite est arithmétique de raison -4 et de premier terme $V_0 = -\dfrac{2}{3}$
   (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de la suite V , puis retrouver la limite de la suite U .

EXERCICE N 5

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :$U_0 = -5$ et $U_{n+1} = \dfrac{9-8U_n}{-11+2U_n}$.

1. (a) Vérifier que pour tout entier naturel n ,$U_{n+1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{-5}{2U_n - 11}\left(U_n + \dfrac{3}{2}\right)$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n,$U_n \leq -\dfrac{3}{2}$.
   (c) Prouver que pour tout entier naturel $n, U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n-3)(-2U_n-3)}{2U_n-11}$et déduire que la suite U est croissante.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \dfrac{\frac{3}{2} + U_n}{-3+U_n}$
   (a) Montrer que V est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme
   (b) .Calculer lim V_n et en déduire lim U_n

EXERCICE N 6

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{1+2U_n}{2+U_n}$

1. Montrer par récurrence que pour tout n, $|U_{n+1} - 1| \leq |U_n - 1|$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|U_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3. Montrer alors que la suite U est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE N 7

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :$U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{3 + 4U_n}{2 + U_n}$

1. Soit f la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x + 2}$
   (a) Montrer que f est dérivable sur I et que $f(I) \subset I$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans I une solution unique l que l'on précisera.
   (c) Montrer que pour tout x de I ,$|f(x)| \leq \dfrac{1}{5}$
   (d) Prouver que pour tout $x \in]3, +\infty[$ on a :$|f(x) - l| \leq \dfrac{1}{5} |x - l|$

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul on a :$|U_{n+1} - l| \leq \dfrac{1}{5} |U_n - l|$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a $|U_n - l| \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
   (b) Déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.