Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de Synthèse n° 2** *Mathématiques*	*Niveau : $2^{ème}$ Sc_{1+2}*
Date : 07 / 03 / 2014	*Profs :Mr Meddeb Tarek*	*Durée : 2 heures*

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (9 pts)

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 1} \quad pour\ tout\ n \in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Calculer U_1 et U_2.

   $b/$ La suite U est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?

2) On pose, pour tout $n \in IN$, $V_n = U_n^2 - 2$.

   $a/$ Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   $b/$ Exprimer V_n en fonction de n, en déduire l'expression de U_n en fonction de n.

   $c/$ Calculer, en fonction de n, les sommes suivantes :

   $$S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n \quad \text{et} \quad S'_n = U_0^2 + U_1^2 + ... + U_n^2.$$

3) Soit W la suite définie sur IN par : $\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n + V_n \quad pour\ tout\ n \in IN \end{cases}$.

   $a/$ Calculer W_1 et W_2.

   $b/$ On pose, pour tout $n \in IN$, $X_n = 2^n W_n$.

   Montrer que X est une suite arithmétique de raison (-4).

   $c/$ Exprimer X_n puis W_n en fonction de n.

   $d/$ Calculer la somme : $S = W_0 + 2W_1 + 4W_2 + ...2^{10}W_{10}$.

Exercice n°2 : (5 pts)

Une unité de longueur étant choisie. Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6$. On place sur le segment $[AB]$ le point C tel que $AC = 4$. On construit le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AC]$.

1) Soit h l'homothétie de centre A telle que $h(B) = C$.

   $a/$ Déterminer le rapport de h.

   $b/$ Montrer que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par h.

2) Soit M un point variable de $\mathscr{C}$. la droite (AM) recoupe $\mathscr{C}'$ en N.

$a/$ Déterminer en justifiant $h(M)$.

$b/$ En déduire que le droites (BM) et (CN) sont parallèles et que $\frac{CN}{BM}=\frac{2}{3}$.

3) Les droites (BN) et (CM) se coupent en J. Soit h' l'homothétie de centre J telle que $h'(B)=N$.

$a/$ Déterminer, en justifiant, l'image de la droite (BM) par h'. En déduire que $h'(M)=C$.

$b/$ Déterminer le rapport de h'.

$c/$ Montrer que $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CM}$.

$d/$ Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}''$ des points J lorsque M varie sur $\mathscr{C}$. (on ne demande pas de construire l'ensemble $\mathscr{C}''$).

Exercice n°3 : *(6 pts)*

Soit $ABCD$ un rectangle de sens direct tel que $AB=2AD$. On désigne par E et F les milieux respectifs des cotés $[AB]$ et $[CD]$, et par r la rotation directe de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer en justifiant $r(D)$ et $r(A)$.
2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BD) et H' le projeté orthogonal de E sur (BD).

$a/$ Déterminer, en justifiant, les images de chacune des droites (BD) et (AH) par r.

$b/$ En déduire que $r(H)=H'$.

3) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre D et de rayon DA.

$a/$ Construire le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par r.

$b/$ Le cercle $\mathscr{C}$ coupe $[ED]$ en M, et le cercle $\mathscr{C}'$ coupe $[EC]$ en N.

Montrer que le triangle FMN est rectangle et isocèle.

Bonne chance