

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<b>Devoir de Synthèse n° 2</b> Mathématiques	Niveau : 2 <sup>ème</sup> Sc1+3+4 + 2 <sup>ème</sup> Info
Date : 04 / 03 / 2013	Profs : Mrs Zaouali M et Meddeb T	Durée : 2 heures



**NB** : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

**Exercice n°1** : (5 pts)

Soit  $U$  la suite définie par :  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1) a/ Calculer  $U_1$  et  $U_2$  .

b/ La suite  $U$  est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?

2) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$ .

a/ Montrer que  $V$  est une suite arithmétique de raison  $(-1)$ .

b/ Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ , en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \frac{n}{n+1}$ .

3) a/ Montrer que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ .

b/ Calculer alors la somme :  $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$ .

**Exercice n°2** : (5 pts)

On considère la suite  $U$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} U_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer  $U_1$  et  $U_2$  .

2) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = \frac{1}{n+1} U_n$ .

a/ Montrer que  $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ , en déduire la nature de la suite  $V$ .

b/ Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

3) Calculer en fonction de  $n$  chacune des sommes suivantes :

$$A = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n.$$

$$B = U_0 + 2U_1 + 2^2U_2 + \dots + 2^nU_n.$$

Exercice n°3 : (5 pts)

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan,  $I$  est le point tel que :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .

On considère l'homothétie  $h$  de centre  $I$  telle que  $h(A) = B$ .

- 1) Déterminer le rapport de  $h$ .
- 2) Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A$  et de rayon  $AI$ .

construire le cercle  $\mathcal{C}'$  image de  $\mathcal{C}$  par  $h$ .

- 3) Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $I$ , la droite  $(MI)$  recoupe  $\mathcal{C}'$  en  $N$ .
  - a/ Montrer que  $h(M) = N$ .
  - b/ Montrer que  $(AM)$  et  $(BN)$  sont parallèles.
  - c/ La droite  $(AM)$  recoupe  $\mathcal{C}$  en  $P$  et la droite  $(BN)$  recoupe  $\mathcal{C}'$  en  $Q$ .  
Montrer que les points  $I, P$  et  $Q$  sont alignés.

Exercice n°4 : (5 pts)

Soit  $ABCD$  un carré direct et  $R$  la rotation directe de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- 1) Déterminer en justifiant, l'image de chacune des droites  $(AB)$  et  $(BC)$  par  $R$ .
- 2) Soit  $P$  le milieu de  $[BC]$ . La droite  $(AP)$  coupe  $(CD)$  en  $Q$ .  
La perpendiculaire à  $(AP)$  menée de  $A$  coupe  $(BC)$  en  $K$  et  $(CD)$  en  $S$ .
  - a/ Déterminer l'image de chacune des droites  $(AP)$  et  $(AK)$  par  $R$ .
  - b/ Montrer que  $R(K) = Q$  et que  $R(P) = S$ .
  - c/ On pose  $R(C) = C'$ . Montrer que  $S$  est le milieu de  $[DC']$ .
- 3) Montrer que les droites  $(PS)$  et  $(KQ)$  sont perpendiculaires.
- 4) Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A$  et de rayon  $AP$ ,  $M$  est un point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $P$ .  
la perpendiculaire à  $(PM)$  menée de  $S$  recoupe  $\mathcal{C}$  en  $M'$ .  
Montrer que  $R(M) = M'$ .

Bonne chance