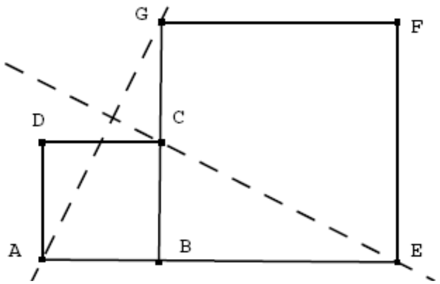
PRODUIT SCALAIRE ET BARYCENTRE

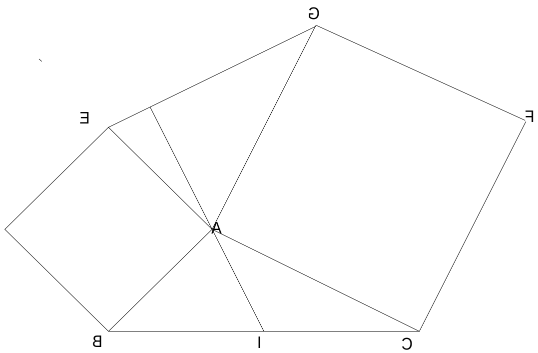
YOUSSEF BEN BOULILA

Produit scalaire

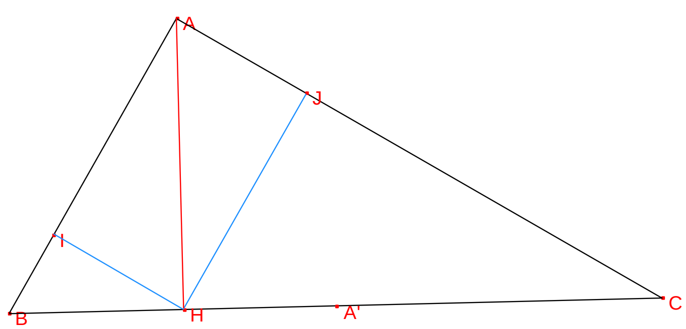
1. ■ Dans la figure ci-dessous, le point B est un point du segment $[AE]$ distinct de A et de E. $ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés. Montrer que les droites (AG) et (EC) sont orthogonales.



2. ■ ABC est un triangle. On construit extérieurement à ce triangle deux carrés $ABDE$ et $ACFG$. Le point I est le milieu de $[BC]$.
Prouver que la médiane (AI) du triangle ABC est une hauteur du triangle AEG, puis que la médiane (AJ) du triangle AEG est une hauteur du triangle ABC.



3. ■ ABC un triangle rectangle en A ; A' est le milieu de $[BC]$, H le pied de la hauteur issue de A, I le projeté orthogonal de H sur $[AB]$ et J le projeté orthogonal de H sur $[AC]$.
Montrer que (IJ) est perpendiculaire à (AA').



4. ■ Relation d'Euler

a) Montrer que, si A, B, C et D sont quatre points quelconques d'un espace euclidien, alors on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

b) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle non plat sont concourantes.

c) Montrer que si un tétraèdre possède deux couples d'arêtes opposées orthogonales, il en va de même pour le troisième couple.

Orthocentre

5. ■ 1) Montrer que dans un triangle ABC d'orthocentre H, on a :

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}.$$

2) Réciproquement, soit M un point du plan tel que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}.$$

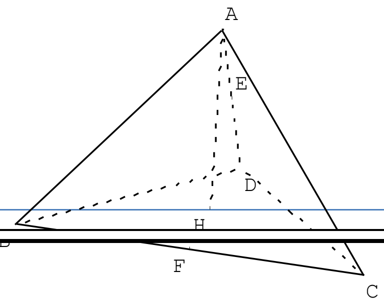
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}$. En déduire que $M = H$.

6. ■ Soit un triangle ABC d'orthocentre H.
Montrer que $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$. Établir deux relations analogues.

7. ■ Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête a. Soit H le projeté orthogonal du sommet A sur la face BCD.

1) Montrer que

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AB}=\frac{a^2}{2}.$$



Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

2) Démontrer que H est équidistant des trois sommets B, C et D.

En déduire que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AH}$.

3) Calculer en fonction de a le carré scalaire $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)^2$ et en déduire AH.

4) Soit E et F les milieux respectifs de [AD] et [BC].

Montrer que $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ et en déduire EF.

8. ■ Étant donné un carré $ABCD$ et M un point de la diagonale (BD), on note P et Q les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (CD).

Montrer que (CM) est orthogonale à (PQ) :

a) de manière analytique ;

b) directement.

9. ■ **Avec les bissectrices**

On considère un triangle ABC et un point M du segment [BC]. On note $x = BM$ et $y = MC$.

1) En appliquant le théorème d'al-Kashi aux triangles MAB et MAC, établir que :

$a\,AM^2 = xb^2 + yc^2 - axy$ (relation de Stewart)

2) On suppose que M est le milieu de [BC].

Retrouver l'expression de la médiane issue de A en fonction des longueurs des côtés.

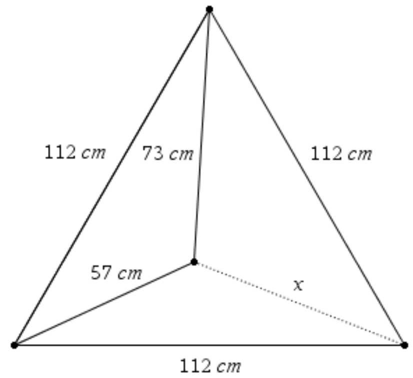
3) On suppose que M est le pied de la bissectrice intérieure issue de A.

Montrer que la bissectrice issue de A a pour longueur $\sqrt{bc\left(1-\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\right)}$.

4) Établir l'équivalence suivante :

$\hat{A}=2\hat{B}$ si et seulement si $c-b=2b\cos\hat{A}$.

10. ■ Donner la valeur de $x\in\mathbb{N}$ correspondant à la figure suivante :



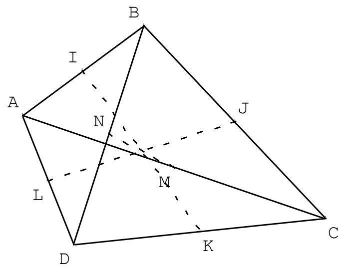
(il existe donc un triangle équilatéral à côté entier, et un point du plan dont les distances aux sommets du triangles équilatéral sont des nombres entiers). YOUSSEF BEN BOULILA

Barycentre

11. ■ Soient *ABC* et *A' B' C'* deux triangles de centres de gravité respectifs *G* et *G'*. YOUSSEF BENBOULILA

a) Montrer que l'on a : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}=3\overrightarrow{GG'}$.
Montrer que *ABC* et *A' B' C'* ont même centre de gravité si et seulement si il existe *D* tel que *DBA' C* et *DB' AC'* soient des parallélogrammes.

12. ■ Montrer que les trois segments joignant les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales d'un quadrilatère *ABCD* ont même milieu (Ces segments sont appelés des *bimédianes*).



13. ■ Dans un tétraèdre *ABCD*, montrer que l'isobarycentre *G* des sommets est aussi les milieux des segments joignant les milieux des arêtes opposées.
Montrer que, si *A'* est le centre de gravité du triangle *BCD*, alors *G* est situé aux trois quarts de [*AA'*] en partant de *A*.

14. ■ Soit un tétraèdre *ABCD*. On considère :
E le barycentre de (*A*,- 1), (*B*,2) et (*C*,- 3),
F le milieu de [*ED*],
G le barycentre de (*A*,1) et (*D*,2),
et *H* le barycentre de (*B*,2) et (*C*,- 3).
1) Démontrer que *F*, *G* et *H* sont alignés.
2) Les points *B*, *C*, *F* et *G* sont-ils coplanaires ?

15. ■ Soit un triangle *ABC* dont tous les angles sont aigus. Ainsi *A'* pied de la hauteur issue de *A* est sur le segment [*BC*].
1) Prouver que $\dfrac{\tan\hat{B}}{\tan\hat{C}}=\dfrac{A'C}{A'B}$.
En déduire que *A'* est barycentre de $\left(B,\tan\hat{B}\right)$ et de $\left(C,\tan\hat{C}\right)$.
2) En déduire l'orthocentre *H* comme barycentre des points *A*, *B* et *C* avec des coefficients appropriés.

16. ■ **Orthocentre comme barycentre des sommets**
On considère un triangle quelconque *ABC*. On pose *a* = *BC*, *b* = *AC* et *c* = *AB*.
1) Établir la relation $a=b\cos C+c\cos B$.
2) Soit *P* le pied sur [*BC*] de la hauteur issue de *A*.
Montrer que $\overrightarrow{BP}=\dfrac{c}{a}\cos B\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP}=\dfrac{b}{a}\cos C\cdot\overrightarrow{CB}$.
3) On désigne par *K* le barycentre de $(A,a\cos B\cos C)$, $(B,b\cos C\cos A)$ et $(C,c\cos A\cos B)$.
a) Montrer que $\cos B\cos C\cdot\overrightarrow{KA}+\cos A\cdot\overrightarrow{KP}=\vec{0}$. En déduire que *K* appartient à la hauteur issue de *A*.
b) Prouver que *K* est l'orthocentre *H* du triangle *ABC*.
4) Supposons le triangle *ABC* non rectangle.
Démontrer que l'orthocentre *H* du triangle *ABC* est barycentre de $\left(A,\dfrac{a}{\cos A}\right)$, $\left(B,\dfrac{b}{\cos B}\right)$ et $\left(C,\dfrac{c}{\cos C}\right)$ puis le barycentre de (*A*, tan *A*), (*B*, tan *B*) et (*C*, tan *C*).

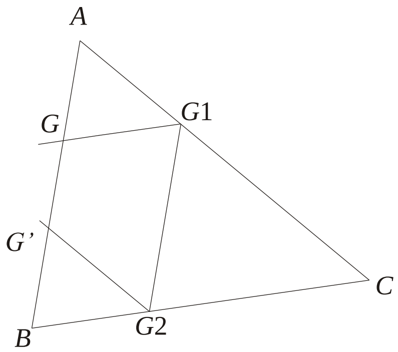
17. ■ **Le théorème de Ménélaüs**
On considère un triangle *ABC* et trois points *P*, *Q* et *R* sur (*BC*), (*AC*) et (*AB*) respectivement, distincts des points *A*, *B* et *C*.
1) Justifier l'existence de trois réels *p*, *q* et *r* tel que *P* soit le barycentre de (*B*,1) et

$(C, -p)$, Q le barycentre de $(C,1)$ et $(A, -q)$ et R celui de $(A,1)$ et $(B, -r)$.
2) Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, déterminer les coordonnées des points R, Q et P.
3) Démontrer que les trois points P, Q et R sont alignés si et seulement si $pqr = -1$.
4) Application : on suppose que R est le symétrique de B par rapport à A et que Q est le milieu de $[AC]$. (RQ) coupe (BC) en P.
Quelle est la position de P sur (BC) ?

18. ■ Exprimer en termes de barycentre les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\ ;\ \overrightarrow{OP} = \lambda\ \overrightarrow{OM}.$$

19. ■ Dans un repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, interpréter comme un barycentre le point $M(x, y)$.



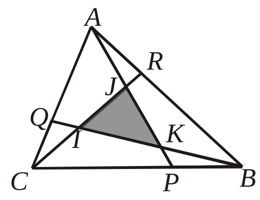
20. ■ Soit un triangle ABC et deux réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$.
On désigne par G le barycentre de (A, α) et de (B, β).
1) Montrer que G' est barycentre de (A, β) et de (B, α) (sur la figure, (GG_1) est parallèle à (BC), (G_1G_2) est parallèle à (AB) et (G_2G') est parallèle à (AC)).
2) Que se passe-t-il quand on recommence avec G' ce que l'on a fait avec G.

21. ■ On considère un triangle ABC et P, Q et R les points définis par :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC};$$

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA};$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$



On note IJK le triangle obtenu.
1) Exprimer I, J et K comme les barycentres de A, B et C avec les coefficients appropriés.
2) Montrer que I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[CJ]$, $[AK]$ et $[BI]$.
3) En utilisant le fait que dans un triangle la médiane découpe deux triangles d'aires égales, montrer que l'aire du triangle IJK est le septième de celle du triangle ABC.

22. ■ 1) On donne trois réels α, β, γ strictement positifs (mais pas nécessairement distincts).
On considère les points
P barycentre de (B, β) et de (C, γ) ;
Q barycentre de (C, γ) et de (A, α) ;
R barycentre de (A, α) et de (B, β).
Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes au point G, barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).
2) On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.
a) Démontrer que les bissectrices intérieures du triangle ABC concourent au barycentre I des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).
b) Soit U la projection orthogonale de I sur (BC). On pose $r = IU$ et $2p = a + b + c$.
Montrer que le cercle de centre I et de rayon r est tangent aux trois côtés du triangle ABC aux points U, V et W.

3) a) Établir que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BU} = (p - b)a$. YOUSSEF BEN BOULILA

b) En déduire que U est le barycentre de $\left(B, \dfrac{1}{p-b}\right)$ et de $\left(C, \dfrac{1}{p-c}\right)$, puis ques les trois droites (AU), (BV) et (CW) sont concourantes.

23. ■ Soit ABC un triangle dont les côtés ont pour mesure a, b et c. On désigne par O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit, par I et r les éléments analogues pour le cercle inscrit.

1) Démontrer que l'on a :

$$(a + b + c)\,\overrightarrow{OI} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}.$$

2) Calculer OI.

24. ■ Étant donné un triangle ABC, de côtés a, b et c, déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que l'on ait :

$$MB^2 + MC^2 = MA^2$$

25. ■ On donne deux points A et B distincts de l'espace et un réel $k > 0$.

Étudier l'ensemble $\left\{M, \dfrac{MA}{MB} = k\right\}$

26. ■ Dans le plan, on considère un triangle ABC de côtés $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, d'angles aux sommets $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

1) Démontrer qu'un point P est sur le cercle circonscrit au triangle, de centre O et de rayon R si et seulement si :

$$a\cos\widehat{A}\,PA^2 + b\cos\widehat{B}\,PB^2 + c\cos\widehat{C}\,PC^2 = abc$$

2) En déduire que O est le barycentre de $(A, a\cos\widehat{A})$, $(B, b\cos\widehat{B})$, $(C, c\cos\widehat{C})$.

YOUSSEF BEN BOULILA