EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION 2015 . PRINCIPALE

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

(CORRECTION).

Exercice 1

I) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ directeur de (AB) et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est normal à P

Puisque $\vec{AB}$ et $\vec{n}$ sont colineaires alors $(AB)\perp P$.

D'où la reponse exacte est $\boxed{b}$

II. $\mathcal{V}(EABD) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABE)\times AD = \frac{1}{3}\times\frac{AB\times AE}{2}\times AD = \frac{1}{3}\times\frac{1\times 1}{2}\times 1$

$= \frac{1}{6}$ $\boxed{c}$

III. H est le projeté orthogonal de O sur Q, alors :

1) $\begin{cases} H\in Q : \text{elimine } b/ \\ \vec{OH} \text{ est normal à } Q : \text{elimine } c/ \end{cases}$ D'où la reponse exacte est $\boxed{a}$

2) $d(O,Q) = OH = \sqrt{3} < 2 \Rightarrow Q\cap S = \text{Cercle}$ $\boxed{b}$

Exercice 2

1) a- $(2\sqrt{3}+2i)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2(2\sqrt{3})(2i) + (2i)^2$

$= 12 + 8i\sqrt{3} - 4$

$= 8 + 8i\sqrt{3}.$

b- $\Delta = \left[2(\sqrt{3}-i)\right]^2 - 4(-4i\sqrt{3})$

$= 4(3-2i\sqrt{3}-1) + 16i\sqrt{3}$

$= 4(2-2i\sqrt{3}) + 16i\sqrt{3}$

$= 8 - 8i\sqrt{3} + 16i\sqrt{3}$

$= 8 + 8i\sqrt{3}.$

$= (2\sqrt{3}+2i)^2 \Rightarrow \delta = 2\sqrt{3}+2i$: racine carrée de Δ.

$$z_1 = \frac{-2(\sqrt{3}-i)-(2\sqrt{3}+2i)}{2} = \frac{-2\sqrt{3}+\cancel{2i}-2\sqrt{3}-\cancel{2i}}{2}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

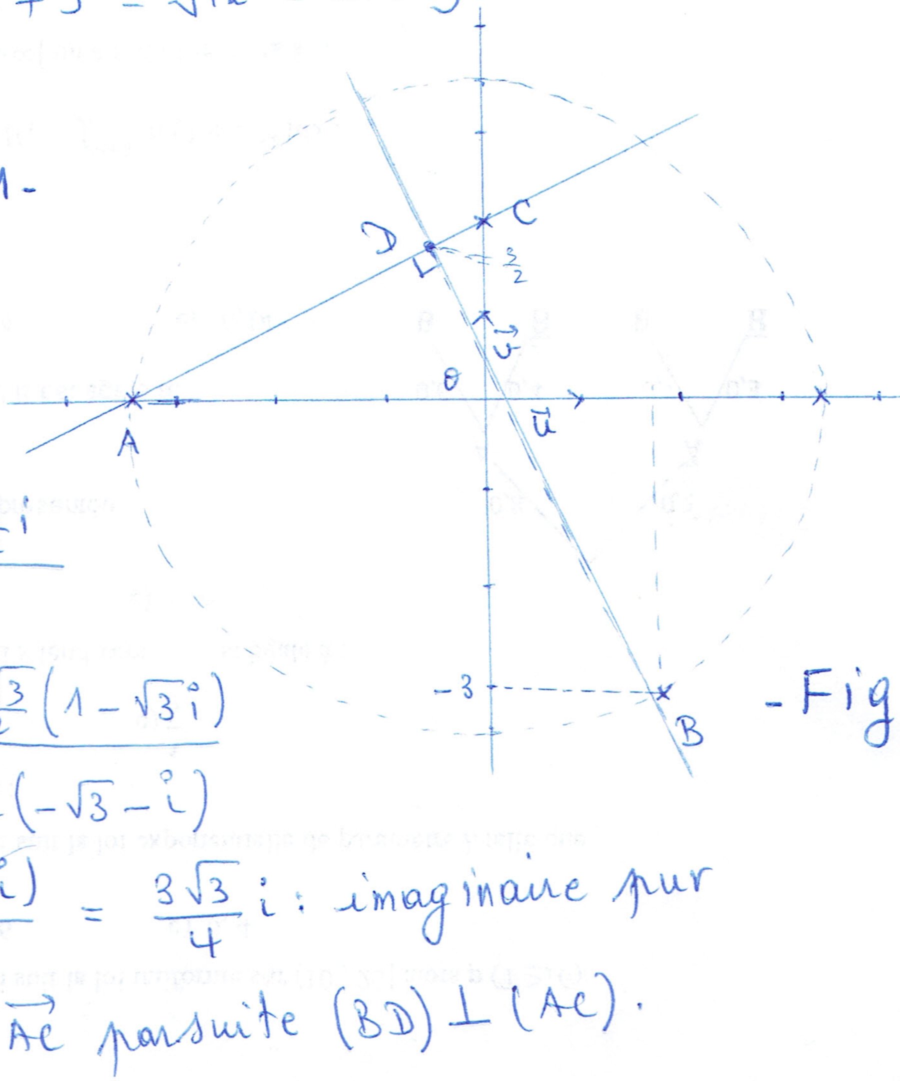
$$z_2 = \frac{-2(\sqrt{3}-i)+2\sqrt{3}+2i}{2} = \frac{-\cancel{2\sqrt{3}}+2i+\cancel{2\sqrt{3}}+2i}{2} = 2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2\sqrt{3}\,;\,2i\}.$$

2) a. $OA = |z_A| = 2\sqrt{3}$.

$OB = |z_B| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ $\Big\}$ $OA = OB$ $\Rightarrow$ OAB est isocèle en O

b. $B \in \mathcal{C}(O, 2\sqrt{3})$ et $y_B = -3$ - Fig 1 -



- Fig 1 -

3)

a.

$$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \frac{\sqrt{3}-3i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{-2\sqrt{3}-2i}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{2}i}{-2\sqrt{3}-2i} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{3}i)}{2(-\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\frac{i(\cancel{-\sqrt{3}-i})}{\cancel{-\sqrt{3}-i}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}i \text{ : imaginaire pur}$$

donc $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ par suite $(BD) \perp (AC)$.

b. $$\frac{z_A - z_D}{z_A - z_C} = \frac{-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{-2\sqrt{3}-2i} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{-2\sqrt{3}-2i} = \frac{-\frac{3}{2}\cancel{(\sqrt{3}+i)}}{-2\cancel{(\sqrt{3}+i)}}$$

$= \frac{3}{4}$: réel $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$\Rightarrow$ A, D et C sont alignés

c. $z_C = 2i$, Construction immédiat.

Du fait que $D \in (AC)$ et $(BD) \perp (AC)$ on déduit la construction de D.

(Fig 1)

d- $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AC \times BD}{2} = \dfrac{|z_C - z_A| \times |z_D - z_B|}{2}$

$= \dfrac{|2\sqrt{3} + 2i| \times |-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} i|}{2}$

$= \dfrac{\cancel{2}|\sqrt{3} + i| \times \frac{3\sqrt{3}}{2}|-1 + i\sqrt{3}|}{\cancel{2}}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{3+1}\sqrt{1+3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times 2 = 6\sqrt{3}.$

Exercice 3

1) a. * Pour $n = 0$, $U_0 = 0 < \sqrt{2}$.

* Supposons que $U_n < \sqrt{2}$, montrons que $U_{n+1} < \sqrt{2}$

$U_n < \sqrt{2} \Leftrightarrow -U_n > -\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} - U_n > \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{2} - U_n} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{2\sqrt{2} - U_n} < \sqrt{2} \Rightarrow U_{n+1} < \sqrt{2}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n < \sqrt{2}$.

b. $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2}{2\sqrt{2} - U_n} - U_n = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}U_n + U_n^2}{2\sqrt{2} - U_n} = \dfrac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2} - U_n}$

On a $(U_n - \sqrt{2})^2 \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ et $2\sqrt{2} - U_n > 0$ car $U_n < \sqrt{2}$

Par suite $U_{n+1} - U_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ D'où (U_n) est croissante.

c. (U_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.

On a • $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2} - x}$

• (U_n) converge vers ℓ avec $\ell \leq \sqrt{2}$

• f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\sqrt{2}\}$ donc elle est continue en ℓ

Donc $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \dfrac{2}{2\sqrt{2} - \ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - 2\sqrt{2}\ell + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\ell - \sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ell = \sqrt{2}}$.

2) a. $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}}{\sqrt{2} - U_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{2}{2\sqrt{2} - U_n}}{\sqrt{2} - \dfrac{2}{2\sqrt{2} - U_n}} = \dfrac{\dfrac{2}{\cancel{2\sqrt{2} - U_n}}}{\dfrac{4 - \sqrt{2}U_n - 2}{\cancel{2\sqrt{2} - U_n}}}$

$= \dfrac{2}{2 - \sqrt{2}U_n} = \dfrac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - U_n)} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - U_n}$.

b. $V_{n+1} - V_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - U_n} - \dfrac{U_n}{\sqrt{2} - U_n} = \dfrac{\sqrt{2} - U_n}{\sqrt{2} - U_n} = 1$.

D'où (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

c. $V_0 = \dfrac{U_0}{\sqrt{2} - U_0} = 0$.

. $V_n = V_0 + n \cdot r = 0 + n \times 1 = n$; $V_n = n$

. On a $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{2} - U_n} \Leftrightarrow \sqrt{2}\, V_n - U_n V_n = U_n$

$\Leftrightarrow U_n V_n + U_n = \sqrt{2}\, V_n$

$\Leftrightarrow U_n(1 + V_n) = \sqrt{2}\, V_n$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{\sqrt{2}\, V_n}{1 + V_n}$.

Comme $V_n = n$ alors $U_n = \dfrac{\sqrt{2}\, n}{1 + n}$.

3) a. $S_n = \ln(U_1) + \ln(U_2) + \dots + \ln(U_n)$

$= \ln(U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n)$

$= \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{4}} \times \dots \times \dfrac{\sqrt{2}(\cancel{n-1})}{\cancel{n}} \times \dfrac{\sqrt{2}\,\cancel{n}}{n+1}\right)$

$= \ln\left(\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1}\right) = n \ln\sqrt{2} - \ln(n+1)$

$= \dfrac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1)$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\ln(n+1)}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$.

Exercice 4

1) a. $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(-2x + x\ln(x+1)\right)$

$= 2+(-1)(-\infty) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1) = -\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-2+\ln(x+1)\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\ln(x+1)\right) = +\infty$

Interprétation graphique :

- C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$

et admet une branche parabolique de direction $(o,\vec{j})$.

2) a. $\forall x\in\,]-1,+\infty[\,,\ f'(x) = -2+\ln(x+1)+x\cdot\dfrac{1}{x+1}$

$= \dfrac{-2x-2+x}{x+1}+\ln(x+1)$

$= -\dfrac{x+2}{x+1}+\ln(x+1)$

b.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

c.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3). a. On a $f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)-\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

$f(\alpha) = -2\alpha+\alpha\ln(\alpha+1) = -2\alpha+\alpha\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1} = -2\alpha+\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha+1}$

$= \dfrac{-2\alpha^2-\cancel{2\alpha}+\alpha^2+\cancel{2\alpha}}{\alpha+1} = \dfrac{-\alpha^2}{\alpha+1} = g(\alpha)$

d'où $f(\alpha) = g(\alpha)$

b- Puisque $f(\alpha) = g(\alpha)$ <u>alors</u> le point P d'abscisse α est un point commun des deux courbes C_f et C_g.

4) a- $f(x) = 0 \iff -2x + x\ln(x+1) = 0$

$$\iff x(-2+\ln(x+1)) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } \ln(x+1) = 2$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x+1 = e^2$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = e^2+1.$$

D'où $C_f \cap (o\vec{i}) = \{O(0,0), A(e^2+1, 0)\}$.

b- Voir fig2.

5) a. $g(x) = \dfrac{-x^2}{x+1} = \dfrac{1-x^2-1}{x+1} = \dfrac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{x+1}} - \dfrac{1}{x+1}$

$$= 1 - x - \frac{1}{x+1}.$$

b. $\displaystyle\int_0^\alpha g(x)\,dx = \int_0^\alpha 1 - x - \frac{1}{x+1}\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)\right]_0^\alpha$

$$= \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \ln(\alpha+1).$$

c- $\displaystyle\int_0^\alpha x\ln(x+1)\,dx = ?$ $\qquad u = \ln(x+1) \longrightarrow u' = \dfrac{1}{x+1}$

$$v' = x \longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_0^\alpha x\ln(x+1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}\int_0^\alpha g(x)\,dx.$$

d- $\displaystyle A = \int_0^\alpha |f(x)|\,dx = \int_0^\alpha -f(x)\,dx = \int_0^\alpha 2x - x\ln(x+1)\,dx$

$$\mathcal{A} = \int_0^{\alpha} 2x\,dx - \int_0^{\alpha} x\ln(x+1)\,dx$$

$$= \left[x^2\right]_0^{\alpha} - \left(\frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} g(x)\,dx\right)$$

$$= \alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) - \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \ln(\alpha+1)\right)$$

$$= \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}\ln(\alpha+1)$$

$$= \frac{5\alpha^2 - 2\alpha}{4} + \ln(\alpha+1)\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)$$

$$= \frac{5\alpha^2 - 2\alpha}{4} + \frac{\alpha+2}{\cancel{\alpha+1}}\,\frac{(1-\alpha)\cancel{(\alpha+1)}}{2}$$

$$= \frac{5\alpha^2 - 2\alpha + 2(\alpha+2)(1-\alpha)}{4}$$

$$= \frac{5\alpha^2 - 2\alpha + 2(\alpha - \alpha^2 + 2 - 2\alpha)}{4}$$

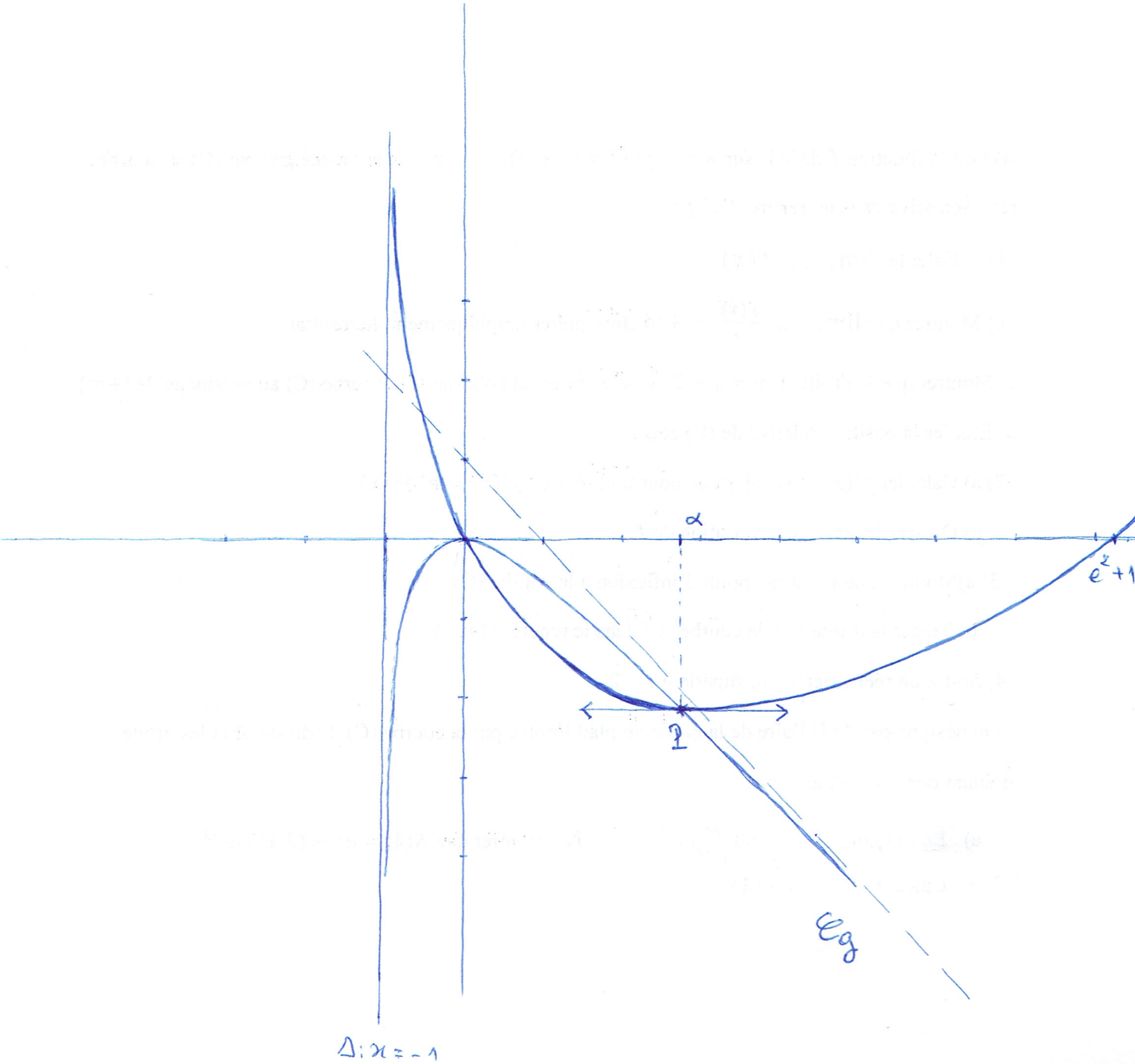
$$= \frac{5\alpha^2 - \cancel{2\alpha} + \cancel{2\alpha} - 2\alpha^2 + 4 - 4\alpha}{4}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{3\alpha^2 - 4\alpha + 4}{4}}$$

$$= \frac{(3\alpha^2 - 4\alpha + 4)(\alpha+1)}{4(\alpha+1)} = \frac{3\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha^2 - \cancel{4\alpha} + \cancel{4\alpha} + 4}{4(\alpha+1)}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{3\alpha^3 - \alpha^2 + 4}{4(\alpha+1)}}$$

~ Fin ~



(Figure 2)