CORRIGÉ DU SUJET DE MATHS
BAC 2015 SESSION PRINCIPALE
PROPOSÉ PAR M^r SALAH HANNACHI

EXERCICE N1 :

I) A(1,0,-1), B(0,2,-2) et le plan P : $x-2y+z+6=0$. Alors La droite (AB) est sécante avec le plan P, **(réponse b))**. En effet : $A \notin P$ et $B \in P$.

II) ABCDEFGH est un cube d'arrête 1. Alors le volume ϑ du tétraèdre EABD est égale à : $\frac{1}{6}$ **(réponse c))**

En effet : $\vartheta = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\left|AE^2\right| = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$

III/ S est la sphère de centre O et de rayon 2 et Q est le plan d'équation $x+y+z-3=0$
H est le projeté orthogonal de O sur le plan Q.

1) H(1,1,1) **(réponse a))**. En effet : $H \in Q$ et $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à Q.

2) L'intersection du plan Q avec la sphère (S) est un cercle **(réponse b))**. En effet : d(O,Q)=OH=$\sqrt{3} < 2$

EXERCICE N2 :

(E) : $z^2 + 2(\sqrt{3}-i)z - 4i\sqrt{3} = 0$ (a=1 , b=$2(\sqrt{3}-i)$, c= $-4i\sqrt{3}$)

1) a) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (2i)^2 + 8i\sqrt{3} = 8 + 8i\sqrt{3}$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 4\left(\sqrt{3}-i\right)^2 - 4 \times (-4i\sqrt{3}) = 4(2-2i\sqrt{3}) + 16i\sqrt{3}) = 8 + 8i\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}+2i\right)^2$

On pose alors $\delta = 2\sqrt{3}+2i$ une racine carrée de Δ. Donc les solutions de l'équation (E) sont :

$z' = \frac{-b+\delta}{2a} = 2\,i$ et $z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = -2\sqrt{3}$ Donc $S_{\mathbb{C}} = \{2i, -2\sqrt{3}\}$

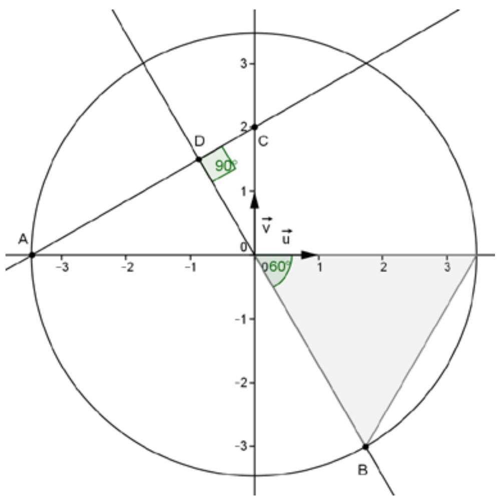
2) $z_A = -2\sqrt{3}$, $z_B = \sqrt{3} - 3i$

a) OA=$|z_A| = 2\sqrt{3}$ OB=$|z_B| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$. Alors OA=OB, d'où le triangle OAB est isocèle en O.

b) OA=OB alors $B \in \mathcal{C}(O, OA)$. D'autre part : $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ tel que : $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

alors $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi le point B est défini par : $\begin{cases} B \in \mathcal{C}(O, OA) \\ \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$



3) $z_C = 2\,i$, $z_D = -\frac{z_B}{2}$

a) $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{3}-3i)}{-2\sqrt{3}-2i} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,i$

* $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{3}}{4}i$ alors $\frac{z_{\overrightarrow{DB}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}$ est imaginaire pur.

Cela implique que $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{CA}$ d'où (BD) $\perp$(AC)

b) $\frac{z_A-z_D}{z_A-z_C}=\frac{-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}(\sqrt{3}-3i)}{-2\sqrt{3}-2i}=\frac{-4\sqrt{3}+(\sqrt{3}-3i)}{-4\sqrt{3}-4i}=\frac{-3\sqrt{3}-3i}{-4\sqrt{3}-4i}=\frac{-3(\sqrt{3}+i)}{-4(\sqrt{3}+i)}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

Alors $\frac{z_{\overrightarrow{DA}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}\in$ IR d'où $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires, et par la suite A, D et C sont alignés.

c) Le point D est l'intersection de (AC) et la perpendiculaire à (AC) passant par B. (Voir figure ci-dessus)

d) L'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A}=\frac{BD\times AC}{2}=\frac{|z_D-z_B|\times|z_C-z_A|}{2}=\frac{\left|\frac{3}{2}(\sqrt{3}-3i)\right|\times|-2\sqrt{3}-2i|}{2}=6\sqrt{3}$

EXERCICE N3 :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}\end{cases}$$

1) a) $*$ Pour n=0 : $u_0=0<\sqrt{2}$

$*$ On suppose que $u_n<\sqrt{2}$ pour tout n ∈ IN.

$*$ Montrons que $u_{n+1}<\sqrt{2}$?

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}-\sqrt{2}=\frac{-2+\sqrt{2}u_n}{2\sqrt{2}-u_n}=\frac{\sqrt{2}(u_n-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-u_n}$$

Or $u_n<\sqrt{2}$ alors $u_n-\sqrt{2}<0$ et $2\sqrt{2}-u_n>0$ donc $u_{n+1}-\sqrt{2}<0$ et par la suite $u_{n+1}<\sqrt{2}$

D'où $u_n<\sqrt{2}$ pour tout n ∈ IN.

b) $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}-u_n=\frac{2-2\sqrt{2}u_n+(u_n)^2}{2\sqrt{2}-u_n}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}-u_n}>0$ D'où (u_n) est croissante.

c) $*$ (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ alors (u_n) est convergente vers un réel L $\leq\sqrt{2}$

$*$ On a : $\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) \\ (u_n) \text{ est convergente vers L} \\ f \text{ est continue en L}\end{cases}$ avec $f:x\mapsto\frac{2}{2\sqrt{2}-x}$ est continue sur IR$\setminus\{2\sqrt{2}\}$

Alors $f(\text{L})=\text{L}$ cela signifie que $\frac{2}{2\sqrt{2}-\text{L}}$ =L (avec L $\neq 2\sqrt{2}$ car L$\leq\sqrt{2}$)

équivaut à $2-2\sqrt{2}.\text{L}+\text{L}^2=0$

équivaut à $(\text{L}-\sqrt{2})^2=0$

équivaut à $\text{L}=\sqrt{2}$

2) $v_n=\frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$

a) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{\sqrt{2}-u_{n+1}}=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}}{\sqrt{2}-\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}}=\frac{2}{\sqrt{2}-\frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}}=\frac{2}{2-\sqrt{2}u_n}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-u_n)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-u_n}$

b) $v_{n+1}-v_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-u_n}-\frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}=\frac{\sqrt{2}-u_n}{\sqrt{2}-u_n}=1$ D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 1

c) $*$ $v_n=v_0+\text{n}.1=\text{n}$

$*$ On a : $v_n=\frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$ équivaut à $v_n(\sqrt{2}-u_n)=u_n$ équivaut à $u_n(1+v_n)=\sqrt{2}v_n$

équivaut à $u_n(1+n)=\sqrt{2}n$ équivaut à $u_n=\frac{\sqrt{2}n}{n+1}$

3) $w_n=\ln(u_n)$, $\text{S}_\text{n}=w_1+w_2+\cdots+w_n$; (n ∈ IN*)

a) $w_n=\ln(u_n)=\ln(\sqrt{2}n)-\ln(\text{n}+1)=\ln(\sqrt{2})+\ln(\text{n})-\ln(\text{n}+1)=\frac{1}{2}\ln2+\ln(\text{n})-\ln(\text{n}+1)$

$\text{S}_\text{n}=[\frac{1}{2}\ln2+\ln(1)-\ln(2)]+[\frac{1}{2}\ln2+\ln(2)-\ln(3)]+\ldots+[\frac{1}{2}\ln2+\ln(\text{n}-1)-\ln(\text{n})]+[\frac{1}{2}\ln2+\ln(\text{n})-\ln(\text{n}+1)]$

$=\text{n}(\frac{1}{2}\ln2)+\ln(1)-\ln(\text{n}+1)=\frac{1}{2}\text{ n}\ln2-\ln(\text{n}+1)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\text{S}_\text{n}}{\text{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\text{ n}\ln2-\ln(\text{n}+1)}{\text{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln2-\frac{\ln(\text{n}+1)}{\text{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln2-[\frac{\ln(\text{n})}{\text{n}}+\frac{\ln(1+\frac{1}{\text{n}})}{\text{n}}]=\frac{1}{2}\ln2$

EXERCICE N4 :

$f(x)= -2x+x\ln(x+1)$; $x\in\,]-1,+\infty[$

1) a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}[-2x + x\ln(x+1)]$ On pose t=x+1 alors :

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} -2(t-1) + (t-1)\ln(t) = +\infty$

b) $*\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[-2x + x\ln(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} x[-2 + \ln(x+1)]$

On pose t=x+1 alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}(t-1)[-2 + \ln(t)] = +\infty$

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}[-2 + \ln(x+1)] = +\infty$

$*$ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors C_f admet au voisinage de $(+\infty)$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

2) a) $f'(x)= -2+\ln(x+1)+\frac{x}{x+1} = -\frac{x+2}{x+1}+\ln(x+1)$; $x\in\,]-1,+\infty[$

b)

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	

c)

3) a) $*$ On sait que $f'(\alpha)=0$ cela signifie que $-\frac{\alpha+2}{\alpha+1}+\ln(\alpha+1)=0$ d'où $\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$

$*f(\alpha)= -2\alpha + \alpha\ln(\alpha+1) = -2\alpha + \alpha\frac{\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{-\alpha^2}{\alpha+1} = g(\alpha)$

b) Le point $P \in C_f$ équivaut à $P(\alpha\,, f(\alpha))$
équivaut à $P(\alpha\,, g(\alpha))$
équivaut à P est le point de C_g d'abscisse α

4) a) $f(x)=0$ équivaut à $-2x + x\ln(x+1) = 0$
équivaut à $x[\ln(x+1)-2]=0$
équivaut à $x=0$ ou $\ln(x+1)=2$
équivaut à $x=0$ ou $x=e^2-1$

Donc $C_f \cap (O,\vec{i})=\{O, A(e^2-1,0)\}$

b) Voir le graphique ci-contre

5) a) $g(x) = \frac{-x^2}{x+1} = \frac{1-x^2-1}{x+1} = \frac{(1-x)(1+x)-1}{x+1}$
$= 1-x-\frac{1}{x+1}$

b) $\int_0^\alpha g(x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)\right]_0^\alpha$
$= \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \ln(\alpha+1)$

c) $K= \int_0^\alpha x\ln(x+1)dx = ?$

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Donc $K = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^{\alpha} - \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{x^2}{x+1}dx = \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} g(x)dx$

d) Le signe de f est donné par le tableau de signe ci-contre :

x	-1		0		α	e^2-1		$+\infty$
f (x)	‖	+	0	−	0	0	+	

$$\mathcal{A} = \int_0^{\alpha}|f(x)|dx = -\int_0^{\alpha} f(x)dx = -\int_0^{\alpha} -2x + x\ln(x+1)dx = \int_0^{\alpha} 2x.dx - \int_0^{\alpha} x\ln(x+1)dx$$

$$= \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha+1) - \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} g(x)dx = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha+1) - \frac{1}{2}[\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \ln(\alpha+1)]$$

$$= \frac{5\alpha^2}{4} - \frac{1}{2}\alpha + (\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2})\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

$$= \frac{5\alpha^2(\alpha+1) - 2\alpha(\alpha+1) + 2(1-\alpha^2)(\alpha+2)}{4(\alpha+1)}$$

$$= \frac{3\alpha^3 - \alpha^2 + 4}{4(\alpha+1)}$$