MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT	Coefficient: 4 Durée: 4heures
Mr : Bouhouch Ameur	4ème Math	Session de Juin 2015

Exercice n°1:

1) On a : $z^2-2z+4=0$, $z\in\mathbb{C}$.

a) $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times1\times4 = 4-16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$.

Donc $\delta = 2i\sqrt{3}$ et alors $z' = \dfrac{-b+\delta}{2a} = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$ et $z'' = \dfrac{-b-\delta}{2a} = \dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1-i\sqrt{3}$.

$S_C = \{1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\}$.

b) On a : $z' = 2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ sa forme exponentielle est alors $\underline{z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

Comme $z'' = \bar{z}'$ alors sa forme exponentielle est $z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) La droite d'équation $x=1$ coupe (Γ) en B et C (Voir figure).

3) Soit $\theta\in\left]-\pi,\pi\right]$ et le point $M(2e^{i\theta})$. $N\in(\Gamma)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

On a alors $|z_N| = 2$ et $\arg(z_N) \equiv \theta+\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où $z_N = 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) a) Soient $M(z)$ et $M'(z') = r(M)$. On a $\begin{cases} AM = AM' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z'-z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)$

$\Leftrightarrow z'-2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-2) \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) On a F=B*M donc $z_F = \dfrac{z_M+z_B}{2} = \dfrac{2e^{i\theta}+2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a K=C*N donc $z_K = \dfrac{z_N+z_C}{2} = \dfrac{2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Montrons que r(F)=K?

On a : $e^{i\frac{\pi}{3}}z_F+2-2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)+2-2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{2i\frac{\pi}{3}}+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}+2-1-i\sqrt{3} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\frac{\pi}{3}} = z_K$ et alors $\underline{r(F) = K.}$

c) Comme $r(F)=K$ alors $\begin{cases} AF = AF \\ \left(\overrightarrow{AF},\widehat{\overrightarrow{AF'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc le triangle AFK est équilatéral.

5) a) On a : $AF^2 = |z_F - z_A|^2 = \left|e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2\right|^2 = \left|\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2\right|^2 = \left|\left(\cos(\theta) - \dfrac{3}{2}\right) + i\left(\sin(\theta) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2$

$$= \left(\cos(\theta) - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sin(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \cos^2(\theta) - 3\cos(\theta) + \frac{9}{4} + \sin^2(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta) + \frac{3}{4}$$

$$= 4 - 3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta) = 4 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

b) Posons $f(\theta) = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right), \theta \in \left]-\pi, \pi\right]$.

AF maximale $\Leftrightarrow f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$

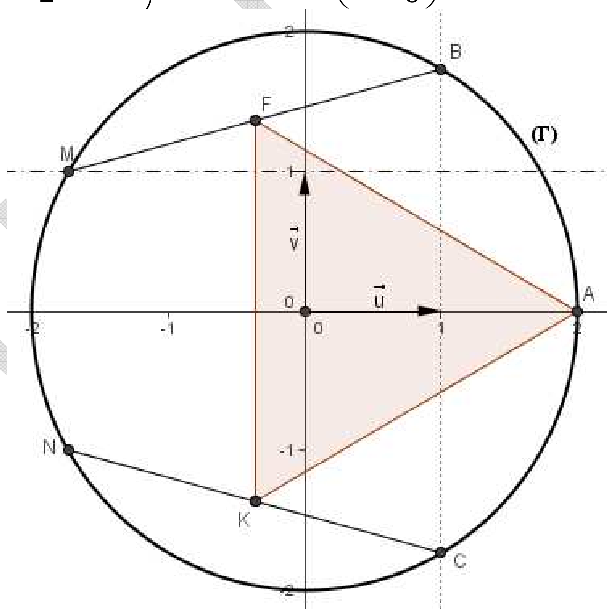
$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \theta + \dfrac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et comme $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ alors $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

ou $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$. Et comme $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$ et $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$.

Alors AF est maximale $\Leftrightarrow \underline{\theta = \dfrac{5\pi}{6}}$

Voir figure



Exercice n°2:

1) * Le rapport de f est $k = \dfrac{AC}{AB} = \tan\left(\widehat{ABC}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

* L'angle de f est $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB},\widehat{\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) a) Le rapport de g est $k' = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) l'axe Δ de g porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.

c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrons que g(B)=D?

Posons g(B)=B'. Comme gog est une homothétie de centre A et de rapport $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$ et puisque

$gog(C) = B'$, alors $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow B' = D$, d'où **<u>g(B)=D.</u>**

* **Montrons que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$?**

Comme g(A)=A, g(B)=D et g(C)=B alors les triangles ABC et ADB sont semblables et par suite on a $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$, or $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{6}$ alors $\underline{\widehat{ABD} = \dfrac{\pi}{6}}$ et on a aussi $\widehat{CBD} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ donc $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ ce qui donne $[BD]$ **est la bissectrice intérieure de l'angle** $A\hat{B}C$ **.**

3) a) fog est la composée d'une similitude directe f, de rapport $\sqrt{3}$, et d'une similitude indirecte g, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors fog est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=1$ donc **g est un antidéplacement.**

Comme $fog(A)=A$ et $fog(C)=C$ alors $\underline{fog = S_{(AC)}}$.

b) $D'=f(D) \Leftrightarrow \begin{cases} AD'=\sqrt{3}AD \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD'=\sqrt{3}AD \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD'=\sqrt{3}\times\frac{1}{3}AC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

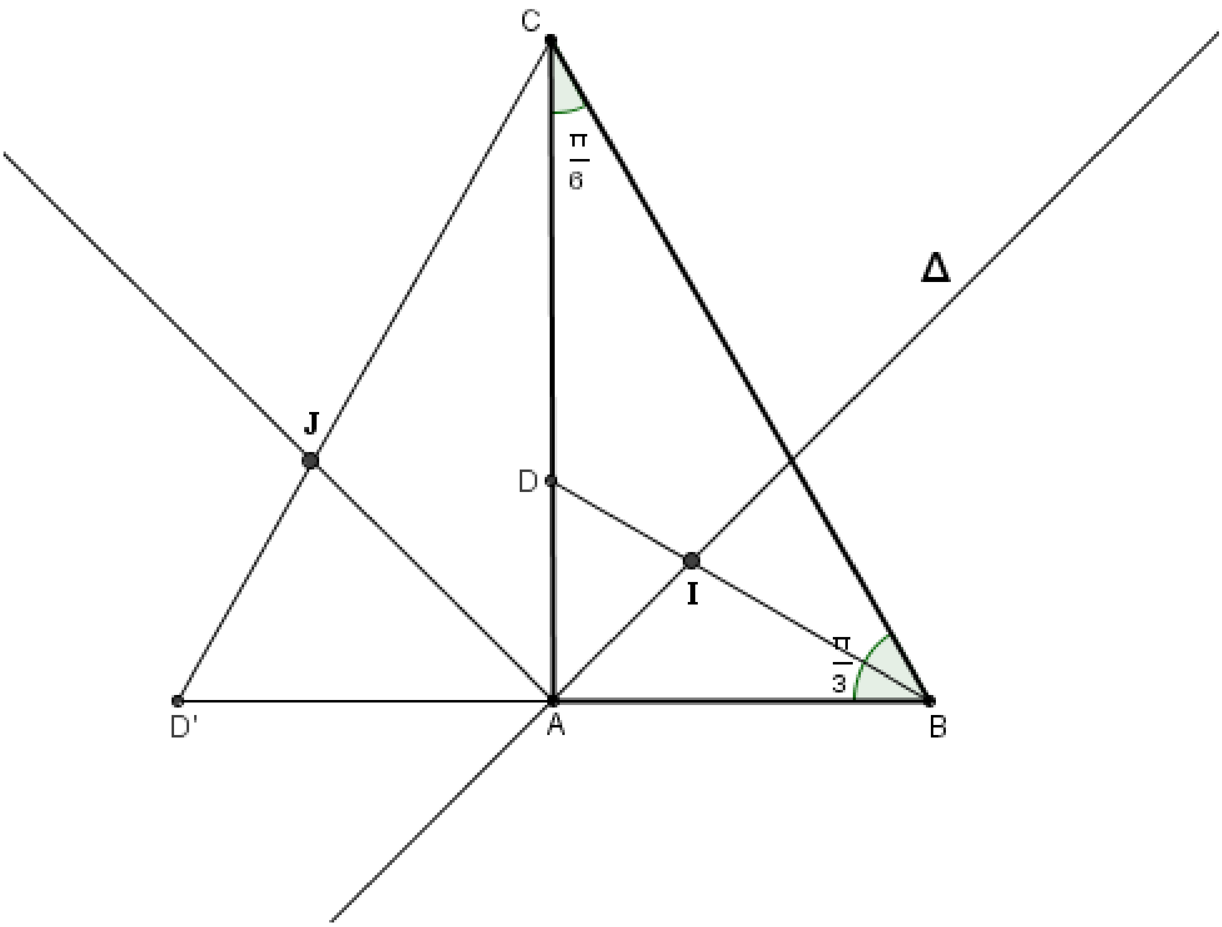
$\Leftrightarrow \begin{cases} AD'=\frac{AC}{\sqrt{3}} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD'}}\right)\equiv\pi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD'=AB \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD'}}\right)\equiv\pi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow A=B*D' \Leftrightarrow \underline{D'=S_A(B)}.$

4) Déterminons f(I)…

On a f(B)=C et f(D)=D' donc <u>f((BD))=(CD').</u>

On a aussi $S_{(AC)}(\Delta)=(AJ)$ et $fog(\Delta)=f(\Delta)$ (car $g(\Delta)=\Delta$). Alors $\underline{f(\Delta)=(AJ)}$

Comme $\{I\}=\Delta\cap(BD)$ alors $\{f(I)\}=f(\Delta)\cap f((BD)) \Leftrightarrow \{f(I)\}=(AJ)\cap(CD')$ d'où $\underline{f(I)=J}$.



Exercice n°3:

1) (E): $47x+53y=1$.

a) On a : $47\times(-9)+53\times 8=-423+424=1$ donc $(-9,8)$ est une solution de (E).

b) * Si (x,y) est solution de (E) alors $47x+53y=1 \Leftrightarrow 47x+53y=47\times(-9)+53\times 8 \Leftrightarrow 47(x+9)=53(8-y)$

On a $\begin{cases} 53/47(x+9) \\ 53\wedge 47=1 \end{cases}$ alors $53/(x+9)$ donc il existe $k\in Z$ tel que $x+9=53k \Leftrightarrow \underline{x=53k-9}$

Comme $47(x+9)=53(8-y)$ alors $47\times 53k=53(8-y)$, on trouve $\underline{y=8-47k}$

* Réciproquement, si $(x,y)=(53k-9,8-47k)$ alors $47x+53y=47\times(53k-9)+53\times(8-47k)$
$=47\times 53k-47\times 9+53\times 8-53\times 47k=1$.Donc (x,y) est solution de (E).

Conclusion: $S_{Z\times Z}=\{(53k-9,8-47k),k\in Z\}$.

c) * Si x est un inverse de 47 modulo 53 $\Leftrightarrow 47x\equiv 1[\mathrm{mod}\,53] \Leftrightarrow$ il existe un entier y tel que $47x=1+53y$
$\Leftrightarrow 47x-53y=1 \Leftrightarrow (x,-y)$ est solution de (E) et par suite $x=53k-9$, $k\in Z$.

* Réciproquement si $x=53k-9$, $k\in Z$,alors $47x=47\times 53k-9\times 47=47\times 53k+1-53\times 8\equiv 1[\mathrm{mod}\,53]$

Conclusion: L'ensemble des inverses de 47 modulo 53 est $\{53k-9,k\in Z\}$.

d) Si $k=1$ alors $53k-9=53-9=44$ c'est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Comme 53 est premier et $45\wedge 53=1$,d'après le théorème de Fermat on a $45^{52}\equiv 1[\mathrm{mod}\,53]$.

b) Comme $45^{52}\equiv 1[\mathrm{mod}\,53]$ alors $45^{2\times 52}\equiv 1[\mathrm{mod}\,53]$, par suite $45^{104}\equiv 1[\mathrm{mod}\,53]$.

D'où $45^{106}\equiv 45^{2}[\mathrm{mod}\,53] \Leftrightarrow 45^{106}\equiv(-8)^{2}[\mathrm{mod}\,53] \Leftrightarrow 45^{106}\equiv 11[\mathrm{mod}\,53]$.

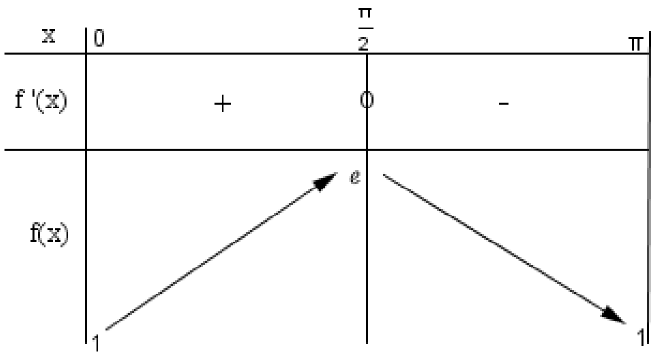
Le reste de 45^{106} modulo 53 est égal à 11.

3) a) N est la somme des 106 premiers termes d'une suite géométrique de raison 45 et de premier terme 1

donc $N=\dfrac{45^{106}-1}{45-1}$ donc $44N=45^{106}-1$ par suite $44N\equiv 10[\mathrm{mod}\,53]$.

b) On a $44N\equiv 10[\mathrm{mod}\,53] \Leftrightarrow -9N\equiv 10[\mathrm{mod}\,53] \Leftrightarrow -54N\equiv 60[\mathrm{mod}\,53] \Leftrightarrow -N\equiv 7[\mathrm{mod}\,53]$
$\Leftrightarrow N\equiv -7[\mathrm{mod}\,53] \Leftrightarrow N\equiv 46[\mathrm{mod}\,53]$ donc le reste de N modulo 53 est égal à 46.

Exercice n°4:



$f(x)=e^{\sin x}$, $x\in[0,\pi]$.

1) a) $f'(x)=\cos(x).e^{\sin x}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$ (Car $x\in[0,\pi]$).

Voir le tableau de variation de f:

b) On a: $x\in[0,\pi] \Leftrightarrow -x\in[-\pi,0] \Leftrightarrow (\pi-x)\in[0,\pi]$.

et $f(\pi-x)=e^{\sin(\pi-x)}=e^{\sin x}=f(x)$ .Donc la droite $\Delta: x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f).

c) On a: $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow (T): y=x+1$.(car f '(0) =f (0) =1).

2) a) *D'aprés le tableau de variation de g on a $g\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)>0$ et g ne s'annule pas sur $\left]0,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

* La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right]$ donc elle réalise une bijection

de $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right]$ sur $\left[-1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$; et comme $0\in\left[-1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$ alors l'équation g(x)=0 admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right]$.

<u>Conclusion:</u> l'équation g(x)=0 admet une solution unique $\alpha\in\left]0,1\right[$.

b) * Si $x\in[0,\alpha]$ on a $g(x)\geq 0$.

* Si $x\in[\alpha,1]$ on a $g(x)\leq 0$.

3) On a $h(x)=e^{\sin x}-(x+1)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

a) On a $h'(x)=\cos(x)e^{\sin x}-1=\sqrt{1-(\sin x)^2}.e^{\sin x}-1=g(\sin x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$; et comme $\alpha\in[0,1]$ alors il existe un unique réel $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=\alpha$.

c) On a : $\sin([0,\beta])=[\sin(0),\sin\beta]=[0,\alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[\sin\beta,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[\alpha,1]$.

d) Tableau de variation de h:

* $h(0)=0$
* $h(\beta)=e^{\sin\beta}-(\beta+1)=e^{\alpha}-(\beta+1)$.
* $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=e-1-\frac{\pi}{2}$

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	0	↗	$e^{\alpha}-(\beta+1)$	↘	$e-1-\frac{\pi}{2}$

e) Comme $e-1-\frac{\pi}{2}>0$ alors $h(x)>0$ et par suite $f(x)\geq x+1$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow$ **La courbe (C_f) est au dessus de la tangente (T) sur l'intervalle** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

II) 1) a) Montrons que pour tout réel $x\geq 0$ on a $\sin x\leq x$?

Posons $\Phi(x)=x-\sin x$, $x\geq 0$.

On a : $\Phi'(x)=1-\cos x\geq 0$, pour tout $x\geq 0$. Donc Φ est croissante sur IR+.

Par suite pour tout $x\geq 0$ on a $\Phi(x)\geq\Phi(0)\Leftrightarrow\Phi(x)\geq 0$ (car $\Phi(0)=0$) $\Leftrightarrow$ <u>$\sin x\leq x$</u>.

b) Comme $\sin x\leq x$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, alors $e^{\sin x}\leq e^{x}$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et alors <u>$f(x)\leq e^{x}$</u>.

c) Pour placer le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2},e\right)$ on trace la droite d'équation $x=1$ qui coupe la courbe de la fonction exponentielle au point de coordonnées $(1,e)$, on place alors le point de (C_f) de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2},e\right)$ (Voir figure).

2) a) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \leq e^x$, alors $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq \left[e^x\right]_0^1 \Leftrightarrow \underline{\int_0^1 f(x)dx \leq e-1}$.

On a aussi pour tout $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(1) \leq \sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin(1) \leq \sin x \leq 1$,alors $\underline{e^{\sin x} \leq e}$

En intégrant chaque membre entre $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ on aura $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} e\,dx \Leftrightarrow \underline{\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}$.

b) Puisque la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f), on a :

$\mathcal{A} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (Car f est positive)

$= 2\int_0^1 f(x)dx + 2\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Et comme $2\int_0^1 f(x)dx \leq 2e-2$ et $2\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e(\pi-2)$ alors $\mathcal{A} \underline{\leq e\pi - 2}$ (*)

* Montrons que $\mathcal{A} \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi$?

On a $f(x) \geq x+1$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \geq \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \geq \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi$ d'où $\underline{\mathcal{A} \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi}$ (**)

De (*) et (**) on déduit que $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq \mathcal{A} \leq e\pi - 2$.