1) Dans un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan on définit 4 paraboles par leurs équations cartésiennes réduites :

$y^2 = 12x \quad (1) \qquad x^2 + 9y = 0 \quad (2) \qquad y^2 + \frac{5}{6}x = 0 \quad (3) \qquad 8x^2 - 5y = 0 \quad (4)$

Pour chacune d'elles, précisez l'axe focal, le foyer et la directrice. Construisez-les.

2) Dans un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan on donne les points $A(3;0)$, $B(-7;0)$, $C(0;5)$, $E(1,3)$ et les droites $d \equiv x = -3$, $d' \equiv y = -1$.

a) Ecrivez l'équation cartésienne (dans $(O,\vec{i},\vec{j})$) de la parabole de foyer A et de directrice d. Précisez son axe focal et son sommet.

b) Mêmes question pour la parabole de foyer B et de directrice d.

c) Mêmes question pour la parabole de foyer C et de directrice d'.

d) Mêmes question pour la parabole de foyer E et de directrice d.

e) Mêmes question pour la parabole de foyer E et de directrice d'.

3) Donnez une équation cartésienne dans un R.O.N. d'origine O des paraboles de sommet O, de foyer F, de directrice d et de paramètre p qui vérifient :

a) (Ox) est l'axe focal, la coordonnée non nulle de F est positive et $p = 7$.

b) (Oy) est l'axe focal, la coordonnée non nulle de F est négative et $p = \frac{11}{4}$.

c) $d \equiv x + 6 = 0$.

d) $F(0;4)$.

e) $F(0;-1)$.

f) (Ox) est l'axe focal et le point $M(3;-4)$ appartient à la parabole.

g) (Oy) est l'axe focal et le point $M(2;-5)$ appartient à la parabole.

4) Soient $\Gamma_1 \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ et $\Gamma_2 \equiv \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ dans un R.O.N. Pour chacune de ces coniques déterminez sa nature, son axe focal, ses sommets, ses foyers, ses directrices, ses asymptotes éventuelles et son excentricité. Donnez également une équation focale pour chacune d'elles. Construisez-les (unités : 1 cm).

5) Le plan est rapporté à un R.O.N. d'origine O. Déterminez une équation cartésienne et une équation focale des coniques de centre O telles que :

a) (Ox) est l'axe focal, le grand axe vaut 16 et la distance focale 12.

b) (Oy) est l'axe focal, la distance focale vaut 20 et l'excentricité $\sqrt{20}$.

c) (Ox) est l'axe focal, le petit axe vaut 10 et l'excentricité 0,2.

d) (Oy) est l'axe focal, le grand axe vaut 32 et la conique passe par $A(1;2)$.

e) La conique passe par les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$ et $\varepsilon<1$.

f) (Oy) est l'axe focal, la distance focale vaut 24 et la conique admet deux asymptotes obliques qui forment un angle de $\frac{\pi}{3}$ rd.

g) Un foyer a pour coordonnées $(-3;0)$ et l'excentricité vaut $\sqrt{3}$.

h) La conique coupe l'axe focal en $(0;-2)$ et elle admet comme A.O. : $y=\frac{1}{3}x$.

i) Un foyer a pour coordonnées $(-8;0)$ et le petit axe vaut 12.

6) **a)** Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $4y^2+12y+4x+9=0$ dans un R.O.N. Déterminez les coordonnées de son foyer, de son sommet et les équations de sa directrice et de son axe de symétrie dans ce même repère.

b) Mêmes questions pour la parabole d'équation $x^2+6x-5y=0$.

7) Identifiez les coniques données par les équations suivantes, donnez leurs caractéristiques (foyers, directrices, sommets, excentricité, asymptotes éventuelles) et représentez-les :

a) $4x^2+9y^2-36=0$

b) $9x^2-y^2+18=0$

c) $9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$

d) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

e) $4y^2-24y+x+36=0$

f) $4x^2-y^2=2y$

g) $x^2+6x+y=0$

h) $4x^2-y^2+x+4y-48=0$

i) $y=2\sqrt{x^2-4}$

8) Déterminez une équation, le sommet, le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ sachant que :

a) L'axe de $\mathcal{P}$ est horizontal et $\mathcal{P}$ passe par $A(-2;3)$, $B(2;7)$ et $C(-1;1)$.

b) L'axe de $\mathcal{P}$ est vertical et $\mathcal{P}$ passe par $A(-2;3)$, $B(2;7)$ et $C(-1;1)$.

c) L'axe de $\mathcal{P}$ n'est pas oblique et $\mathcal{P}$ passe par $A(-1;5)$, $B(1;2)$ et $C(3;5)$.

9) Déterminez l'équation cartésienne réduite des coniques suivantes données par un foyer F et la directrice associée dans un R.O.N. ainsi que leur excentricité ε :

a) $F(1,4)$, $d \equiv y+3=0$ et $\varepsilon=2$.

b) $F(-2,3)$, $d \equiv x+5=0$ et $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

c) $F(5,2)$, $d \equiv y-1=0$ et $\varepsilon=1$.

d) $F(6,-2)$, $d \equiv x=2{,}8$ et $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

e) $F(-\frac{11}{2},5)$, $d \equiv x=-\frac{1}{2}$ et $\varepsilon=1$.

10) Soient A et B deux points fixes avec $AB=8$. Déterminez la nature, donnez une équation cartésienne et une équation focale des lieux suivants puis construisez-les:

$\mathbb{S}=\{M / MA+MB=10\}$ $\qquad$ $\mathbb{T}=\{M / |MA-MB|=4\}$

11) Un jardinier souhaite créer un parterre de forme elliptique dont la grande dimension est 20 m et la plus petite 10 m. Pour cela il plante deux piquets fixes M et P dans le sol auxquels il attache les deux bouts d'une ficelle rigide d'une certaine longueur. Il tend cette ficelle par un piquet mobile R qu'il garde toujours vertical tout en le déplaçant de telle façon que la corde reste bien tendue. Justifiez pourquoi le piquet R décrit de cette façon une ellipse ! Comment faut-il choisir la distance entre les piquets fixes et la longueur de la ficelle pour obtenir l'ellipse souhaitée ?

12) Soit l'hyperbole d'équation $4x^2-9y^2=36$ et les droites :

$d_1 \equiv x-y+1=0$

$d_2 \equiv 2(\sqrt{2}+1)x-3y-6(\sqrt{2}+1)=0$

$d_3 \equiv y=4-\frac{2\sqrt{5}}{3}x$

Etudiez les positions relatives de ces droites et de cette hyperbole.

13) Déterminez les équations des tangentes à l'ellipse d'équation $9x^2+16y^2=144$ aux points d'abscisse 2 et aux points d'ordonnée 3.

14) Discutez suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de la droite $d \equiv x+y=m$ et de l'ellipse $\Gamma \equiv 4x^2+y^2=1$.

15) Soit Γ une parabole de sommet S, de directrice d et de foyer F, T un point de Γ différent du sommet S, t la tangente à Γ au point T. La tangente t coupe d en U et la droite passant par le foyer F qui est parallèle à d en R (figure !). Montrez que $FU = FR$.

16) Soit $\Gamma \equiv y^2=2px$ l'équation d'une parabole dans un R.O.N. du plan, $M(x_1, y_1) \in \Gamma$ et t la tangente à Γ au point M qui coupe (Ox) en T et (Oy) en J.

a) Déterminez une équation de t.

b) Montrez que $T(-x_1, 0)$ et $J\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$.

c) Déduisez-en une construction de la tangente t.

17) Soit l'ellipse d'équation cartésienne $\Gamma \equiv 4x^2+9y^2=36$. Déterminez les équations des tangentes à cette ellipse issues du point $P(4;0)$ ainsi que les coordonnées de leurs points de contact.

18) Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $\Gamma \equiv x^2-4y^2-4=0$. Déterminez les équations des tangentes à cette hyperbole issues du point $P(1;1)$. Faites une figure !

19) Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $\Gamma \equiv 16x^2-25y^2+400=0$. Déterminez les équations des tangentes à cette hyperbole de coefficient angulaire $\frac{\sqrt{7}}{5}$. Faites une figure !

20) Soit la conique d'équation cartésienne $\Gamma \equiv y^2-6y-8x+41=0$ et la droite $d \equiv 3x-4y+1=0$. Déterminez les équations des tangentes à cette conique qui sont parallèles à d. (figure !)