

## Comment déterminer un ensemble de points à partir de la forme algébrique ?

Méthode : Il faut savoir « traduire l'énoncé », les remarques suivantes sont souvent utiles pour le faire :

- $z$  est un nombre réel signifie que  $Im(z) = 0$  ou que  $z = \bar{z}$  ou que l'image de  $z$  est un point de l'axe réel (on l'interprètera aussi plus loin à l'aide de l'argument)
- $z$  est un nombre imaginaire signifie que  $Re(z) = 0$  ou que  $z = -\bar{z}$  ou que l'image de  $z$  appartient à l'axe imaginaire. (interprétation aussi avec l'argument, voir plus loin)

Il faut aussi savoir reconnaître les ensembles de points à partir de leur équation :

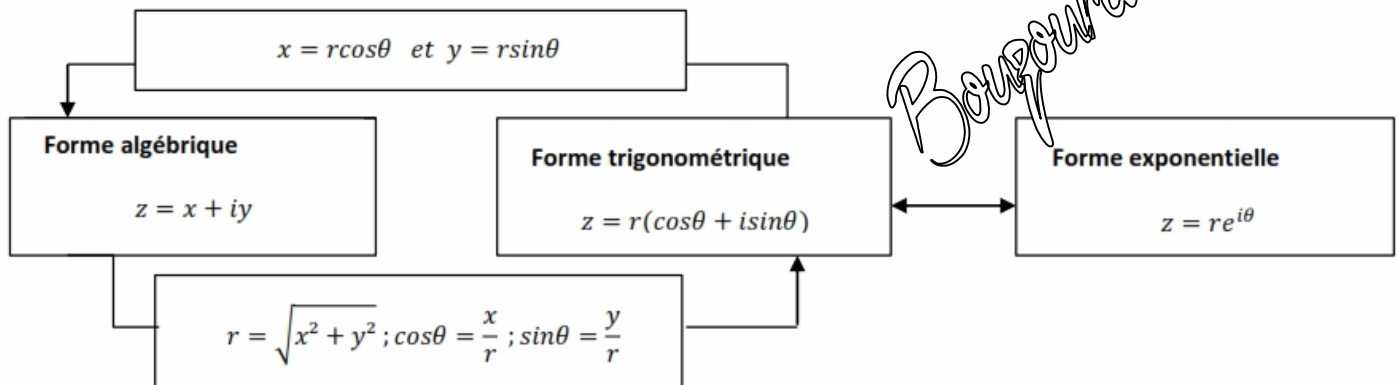
- $ax + by + c = 0$  pour une droite
- $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$  pour le cercle de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $(x_\Omega + iy_\Omega)$  et de rayon  $R$ .

Exemples : A tout nombre complexe  $z$  différent de  $-2i$ , on associe le nombre complexe  $Z = \frac{z-2+i}{z+2i}$ . On pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels.

- 1) Exprimer en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réelle  $X$  et la partie imaginaire  $Y$  de  $Z$ .
- 2) En déduire l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  du plan complexe, d'affixe  $z$  tels que  $Z$  est réel.
- 3) En déduire l'ensemble  $\mathcal{F}$  des points  $M$  du plan complexe, d'affixe  $z$  tels que  $Z$  est imaginaire pur.

	Que faut-il faire ?	Quelle forme faut-il choisir ?
<b>Forme algébrique</b>	$a + ib$ vérifier que $a$ et $b$ sont réels.	Cette forme facilite les calculs de somme et de différence et permet de faire le lien entre les complexes et les coordonnées cartésiennes des points images.
<b>Forme trigonométrique</b>	$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ vérifier que $r$ est un réel positif.	Cette forme établit le lien entre les complexes et la géométrie, elle permet le calcul des distances et des angles.
<b>Forme exponentielle</b>	$re^{i\theta}$ vérifier que $r$ est positif	Cette forme facilite les calculs de produit, de quotient et de puissance de nombres complexes.

Pour passer d'une forme à l'autre :



Exemple : Relier les nombres complexes proposés à leurs différentes formes :

Complexes	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$(1 + i)^3$	$-2 - 2i$	$2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$	$\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$
$-2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$	$2 + 2i$	$2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$	$2\sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
$\frac{8 + 4i}{3 - i}$	$-2 + 2i$	$2\sqrt{2} \left( \cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$	$2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

➤ Cas particuliers à bien savoir :  $e^{i \times 0} = 1$     $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$     $e^{i\pi} = -1$     $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

### Comment calculer module et argument ?

Exemple :  $z = 3 - 3i$ .

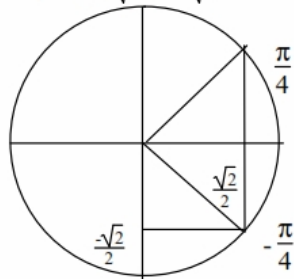
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9} \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On peut dire  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ou  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  à  $2\pi$  près.

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{NEGATIF}$$

$$\text{donc } \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

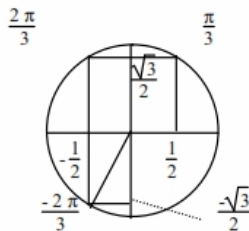


$$\text{donc } z = [3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}] = 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

### Comment passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique ?

$$\rho e^{i\theta} = [\rho, \theta] = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$$

$$\text{exemple } 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i \frac{-\sqrt{3}}{2}) = -1 - i\sqrt{3}$$



Bouzouraa Chaouki

### Comment utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes en géométrie ?

Méthode : Pour utiliser les nombres complexes en géométrie, il est utile de connaître leur forme trigonométrique, les règles de calcul sur celle-ci et l'interprétation géométrique des modules et arguments suivants :

$$|z_B - z_A| = AB \quad ; \quad \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \vec{AB}) \quad (2\pi) \quad ; \quad \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB} \quad ; \quad \arg \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = (\vec{AB}; \vec{AC}) \quad (2\pi)$$

Dans ce qui précède A, B et C sont trois points tels que  $A \neq B$  et  $A \neq C$

Exemples : 1) Soit  $z_1 = -\sqrt{3} + i$   $z_2 = -2i$   $z_3 = \sqrt{3} + i$  les affixes respectives de trois points A, B et C.

Déterminer la forme exponentielle de  $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ . En déduire la nature du triangle ABC.

### Comment multiplier deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes, mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

$$\text{Exemple : } (3 + 4i)(5 - 2i) = 15 - 6i + 20i - 8i^2 = 15 + 14i + 8 = 23 + 14i$$

$$5e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 10e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6})} = 10e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (= 10(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})) = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} + i 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i.$$

### Comment diviser deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes, mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

$$\text{Exemple : } \frac{(3 + 4i)}{(5 - 2i)} = \frac{(3 + 4i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{15 + 6i + 20i + 8i^2}{25 - 4i^2} = \frac{15 + 26i - 8}{25 + 4} = \frac{7 + 26i}{29} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}i.$$

$$\text{Exemple } \frac{5e^{i\frac{\pi}{12}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{5}{2} e^{i(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6})} = 2,5 e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z - 5 + 3i| = 9$ .

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z + 7 - 2i| = |z + 5 - i|$

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z - 5i| = 2|z + 1 - 3i|$

Méthode : Pour trouver les ensembles cherchés on utilise en général les caractérisations suivantes :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$  ou  $\arg(z) = 0$  ( $\pi$ )
- $z \in \mathbb{R}$  et  $z > 0 \Leftrightarrow \arg(z) = 0$  ( $2\pi$ )
- $z \in \mathbb{R}$  et  $z < 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \pi$  ( $2\pi$ )
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$  ou  $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$  ( $\pi$ )
- $z \in i\mathbb{R}$  et  $\text{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}$  ( $2\pi$ )
- $z \in i\mathbb{R}$  et  $\text{Im}(z) < 0 \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2}$  ( $2\pi$ )
- $MA = MB \Leftrightarrow M$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0$  ( $\pi$ )  $\Leftrightarrow M$  appartient à la droite  $(AB)$  privée de  $A$  et  $B$
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi$  ( $2\pi$ )  $\Leftrightarrow M \in ]AB[$
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$  ( $\pi$ )  $\Leftrightarrow M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  privé de  $A$  et  $B$ .
- $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$  ( $2\pi$ )  $\Leftrightarrow M$  appartient à l'un des demi-cercle de diamètre  $[AB]$  privé de  $A$  et  $B$ , on précise lequel en citant par exemple un de ses points.

Bouzouraa Chaouki

Exemple : On désigne par  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $-i$  et  $2i$ . A tout point  $M$  d'affixe  $z$ ,  $M$  distinct de  $A$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $Z$  telle que  $Z = i \left( \frac{z-2i}{z+i} \right)$ .

- 1) Déterminer l'ensemble des points  $M$  dont les images  $M'$  appartiennent à l'axe imaginaire.
- 2) Déterminer l'ensemble des points  $M$  dont les images  $M'$  appartiennent à l'axe réel.
- 3) Déterminer l'ensemble des points  $M$  dont les images  $M'$  appartiennent au cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

### Comment préciser la position relative de trois points ?

Méthode : Dans le plan complexe,  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  sont trois nombres complexes distincts, d'images respectives  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On considère le nombre complexe  $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ . On a :

- $|Z| = 1 \Leftrightarrow AB = AC$
- $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B$  et  $C$  alignés
- $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \perp (AC)$
- $Z = \pm i \Leftrightarrow ABC$  est rectangle et isocèle en  $A$
- $Z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow ABC$  est un triangle équilatéral

Exemple : Dans chacun des cas que peut-on dire des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ?

1)  $z_A = 2 + i$  ;  $z_B = 1 + i$  ;  $z_C = 2 + 2i$

2)  $z_A = 2 + i$  ;  $z_B = 1 + i$  ;  $z_C = 1 - i$

3)  $z_A = -1 - 2i$  ;  $z_B = -10 - 8i$  ;  $z_C = 2$

4)  $z_A = -1 + i\sqrt{3}$  ;  $z_B = -1 - i\sqrt{3}$  ;  $z_C = 2$



### Comment résoudre une équation du second degré ?

exemple  $3z^2 + 4z + 1 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$$

$\Delta > 0$  donc 2 solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{-4 + 2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{-4 - 2}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}; -1 \right\}$$

exemple  $-3z^2 + 4z - 2 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 16 - 24 = -8$$

$\Delta < 0$  donc 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + i\sqrt{8}}{2(-3)} = \frac{-4 + i \times 2\sqrt{2}}{-6} = \frac{-2 + i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}$$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 - i\sqrt{8}}{2(-3)} = \frac{-4 - i \times 2\sqrt{2}}{-6} = \frac{-2 - i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}; \frac{2 + i\sqrt{2}}{3} \right\}$$

À RETENIR : dans  $\mathbb{C}$ , on peut toujours obtenir la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \text{ où } z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines du polynôme } az^2 + bz + c$$

résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 = 3 + 4i$

On écrit  $z = x + iy$ , ainsi :  $x^2 + 2xyi - y^2 = 3 + 4i$

Et avec la condition sur les modules ( $|z|^2 = 5$ ), on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent :  $x^2 = 4$  et  $y^2 = 1$

Or, d'après la troisième condition  $xy = 2$ , les réels  $x$  et  $y$  sont de même signe. On obtient donc :

$$z_1 = 2 + i ; z_2 = -2 - i$$

résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $(1 + i)z^2 + iz - 1 = 0$

On calcule le discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1 - 4(1 + i)(-1) = -1 + 4(1 + i) = 3 + 4i$$

On cherche un complexe  $\delta$  tel que :  $\delta^2 = 3 + 4i$

D'après l'exemple précédent,  $\delta = 2 + i$  convient. On en déduit nos deux solutions :

$$z_1 = \frac{-i - (2 + i)}{2(1 + i)} = \frac{-2 - 2i}{2(1 + i)} = -1 ; z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-i + (2 + i)}{2(1 + i)} = \frac{2}{2(1 + i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Remarque : on pouvait voir dès le début la racine évidente  $z_1 = -1$  et en déduire  $z_2$  avec la relation  $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ .

Résoudre l'équation  $(7 - 6i)z^2 - 2(7 - 6i)z - 85 = 0$ .

### Corrigé

$$(7 - 6i)z^2 - 2(7 - 6i)z - 85 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - \frac{85}{7 - 6i} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - (7 + 6i) = 0.$$

$$\Delta' = 8 + 6i = (3 + i)^2 \text{ car } \begin{cases} X^2 - Y^2 = 8 \\ 2XY = 6 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{64 + 36} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = 9 \\ Y^2 = 1 \\ XY > 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} z_1 = 1 + (3 + i) = 4 + i \\ z_2 = 1 - (3 + i) = -2 - i \end{cases}$$

Résoudre  $z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0$   
sachant qu'il existe une racine imaginaire pure.

Résoudre  $z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0$

Posons  $z = ai$ .

$$(E) \text{ s'écrit } (5a^2 - 16a + 3) + i(-a^3 + 3a^2 + 7a - 21) = 0$$

La partie réelle s'annule pour  $a \in \{3, \frac{1}{5}\}$  et seul 3 annule la partie imaginaire

donc le polynôme est divisible par  $z - 3i$  et l'équation s'écrit  $(z - 3i)(z^2 - 5z + 7 + i) = 0$

$$\Delta = 25 - 4(7 + i) = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$$

$$S = \{3i, 2 + i, 3 - i\}$$

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + \sqrt{3}z - 5 + 3\sqrt{3}i = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré.  $\Delta = 3 - 4(-5 + 3\sqrt{3}i) = 23 - 12i\sqrt{3}$ .

$$(x + iy)^2 = 23 - 12i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 23 \\ 2xy = -12\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 27 \\ xy < 0 \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

On en déduit  $\Delta = (\sqrt{27} - 2i)^2 = (3\sqrt{3} - 2i)^2$ .

Les solutions de l'équation sont donc  $z_1 = \sqrt{3} - i$  et  $z_2 = -2\sqrt{3} + i$ .