Moêz Saidani

DEVOIR DE SYNTHESE N3

Bac maths

EXERCICE N 1 *4 points*

1. On considère l'équation (1) d'inconnue(n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $11n - 24m = 1$
   (a) Justifier que cette équation admet au moins une solution.
   (b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1) .En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1) .
2. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
3. Soit (n, m) un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1).
   (a) Montrer que $(10^{11n} - 1) - 10\,(10^{24m} - 1) = 9$
   (b) Montrer pour tout réel x non nul et tout entier naturel k on a : $x^k - 1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x + 1)$.
   (c) Montrer que : $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.En déduire que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
4. Déterminer des questions précédentes le $PGCD$ de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.
   (a) Montrer que $10^{12} \equiv 1\,[\mathrm{mod}\,13]$ et en déduire que $10^{24} - 1$ est divisible par 13.
   (b) Montrer que $10^6 \equiv 1\,[\mathrm{mod}\,7]$ et en déduire que $10^{24} - 1$ est divisible par 7.
   (c) Montrer que $10^{24} - 1$ est divisible par 3.
5. En déduire de ce qui précède que $10^{24} - 1$ est divisible par 273.

EXERCICE N 2 *7 points*

1. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = & \dfrac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \;;x > 0 \\ f(0) = & 1 \end{cases}$;
   (a) Montrer que f est continue à droite en 0, et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

(b) Etudier la dérivabilité de f en 0 ,(utiliser $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$).

(c) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-x\ln x(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$,

(d) Dresser le tableau de variation de f

2. Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, et (C_F) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

(a) Donner une primtive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]0; +\infty[$

(b) Montrer que pour tout $t \geq e$;$t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} < \sqrt{2}t\ln t$.

(c) Montrer que pour tout $t \geq e$;$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \displaystyle\int_e^x \dfrac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt < \ln(\ln x)$.

(d) déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{F(x)}{x}\right) = 0$

(e) Montrer que (C_F) possède deux points d'inflèxions dont on donnera leur abscisses .

(f) Construire (C_F)(on prendre $F(1) \approx 0.5$ et $F\left(\dfrac{1}{e}\right) \approx 0.4$)

3. Pour tout $x \geq 0$ .On pose $\varphi(x) = x - F(x)$

(a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ et donner les variations de φ

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $\varphi(x) = n$ possède une unique solution $\alpha_n > 0$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}; \alpha_n \geq n$ et calculer $\lim \alpha_n$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1; 0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$ (en utilisant le théorème des accroissements finis).

(b) calculer $\lim\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$

EXERCICE N 3 *4 points*

Le tableau suivant donne la population d'une ville entre les anneés 1965 et 2010 .la population est en milliers d'habitants

Années	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Rang de l'année (X)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Population (Y)	18	25	34	46	58	74	90	110	130	153

1. **les résultats seront arrondis à 10^{-2} prés.**

(a) Représenter le nuage de points ainsi que le point moyen dans le plan muni d'un repère orthogonal adéquat .

(b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r_{X,Y}$

(c) Donner l'équation de la droite de régression de Y en X

(d) Donner une estimation de la population de cette ville cet année (2015)

2. L'allure de nuage suggère à chercher un nouveau ajustement,on effecte le changement suivant $Z = \left(\dfrac{Y-18}{X}\right)$ pour $X \neq 0$

(a) Completer le tableau suivant

X	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$Z = \left(\dfrac{Y-18}{X}\right)$	✠	...	...	...	...	...	...	...	...	...

(b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r_{X,Z}$.

(c) Donner l'équation de la droite de régression de Z en X

(d) Déduire le nouveau ajustement quadratique Y en X

(e) Donner une nouvelle estimation de la population de cette ville cet année (2015)

(f) les résultats du sondage donnent une valeur de 178 milles habitants .Lesquel de deux ajustement vous semble le plus pertinent ?

(g) En quelle année la population dépasse 200 milles habitants si on adopte le deuxième ajustement

EXERCICE N 3 *5 points*

PARTIE A

Le service après vente d'une entreprise ,vendant une certaine marque de tablette, s'est aperçu que ces dernières pourraient présenter deux types de défaut ,l'un lié à la batterie, l'autre lié à l'affichage .Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :

La probabilité pour une tablette tirée au hasard de présenter un défaut de la batterie est égale à 0.04. En présence du défaut de la batterie , la probabilité que la tablette soit en panne d'affichage est 0.03

Alors qu'en absence de défaut de batterie , la probabilité de ne pas présenter de défaut est de 0.94

On note B l'événement : « la tablette présente un défaut de la batterie »

A l'événement « la tablette présente un défaut d'affichage »

Les résultats du calcul des probabilités seront arrondis à 10^{-3} prés

1. Calculer $P(B)$, $P(A|B)$ et $P(A|\overline{B})$

(a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation:

(b) On choisit une tablette de cette marque au hasard

i. Calculer la probabilité que la tablette présente deux défaut

ii. Calculer la probabilité que la tablette présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de la batterie

iii. Déduire $P(A)$

(c) Montrer que la probabilité que la tablette ne présente aucun défaut est 0.9024

2. Le prix de vente d'une tablette est fixé à 350 D et le service après vente s'engage à prendre en charge les réparations en cas de présence d'un défaut

Si la tablette présente un défaut de la batterie ,le coût de réparation est de 30 DT
Si la tablette présente un défaut d'affichage ,le coût de réparation est de 50 DT
Si la tablette présente les deux défauts alors le client récupère ses 350 DT et garde la tablette

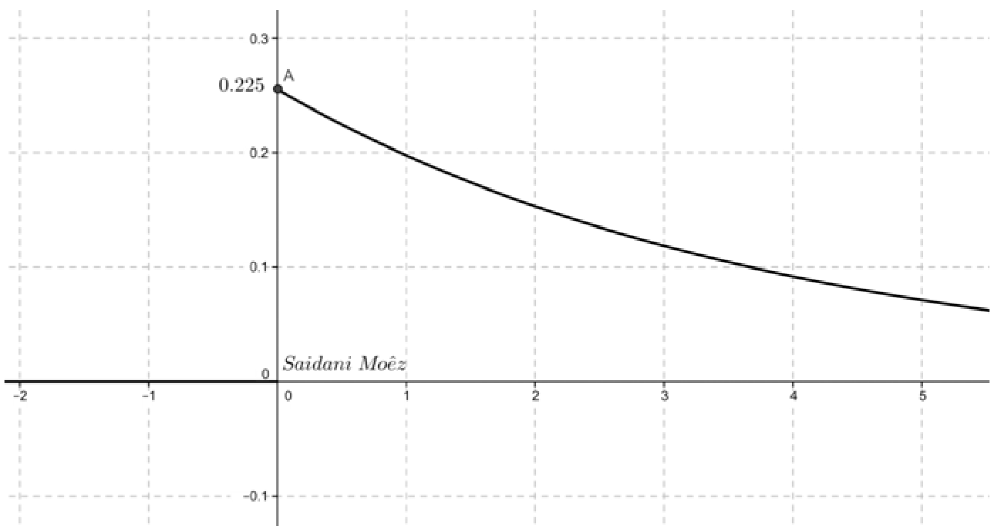
Soit X la variable aléatoire égale au prix de vente réel d'une tablette (après réparation si c'est nécessaire)

Déterminer la loi de X

Calculer alors le prix de vente d'une tablette que peut espérer l'entreprise

PARTIE B

On suppose que la durée de vie (exprimée en années) d'une tablette de cette marque suit la loi exponentielle) dont la fonction densité de probabilité est donnée ci –dessous



1. D'après le graphique
   (a) Déterminer le paramètre λ
   (b) Vérifier que $P(X \leq 1) > 0.2$ (sans faire de calcul)
   (c) Exprimer au sens d'aire $P(1 \leq X \leq 2)$
2. (a) Calculer $P(X \leq 1)$
   (b) Calculer $P(X \geq 5 | X \geq 2)$
   (c) Calculer l'espérance de vie de cette tablette au mois près

BON COURAGE
SUJET TRAITE PAR LaTeX