Lycée Ibn Khaldoun Jammel	Devoir de Contrôle n° 4 Mathématiques	4M 30/04/2015

Exercice n°:01

1) a. Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.

b. Vérifier que 87 et 31 sont premier entre eux.

2) On considère l'équation E : $87x+31y=2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple (u,v) d'entiers relatifs tels que $87x+31y=1$, puis une solution (x_0,y_0) de E.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de E dans $\mathbb{Z}^2$

c. Déterminer les points de la droite d'équation $87x-31y-2=0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Exercice n° :02

Un magasin vend trois types de calculatrices (Sharp , Casio , et TI (Texas instruments))
25 % des calculatrices sont de marques Sharp et 35 % de marque Casio.
20% des calculatrices de marque Sharp sont programmables, 60% des calculatrices de marque Casio sont programmables et 75% des calculatrices de marque TI sont programmables.
La marque de la calculatrice n'apparait pas sur l'emballage .on choisit une calculatrice au hasard
On note :
S : « la calculatrice est de marque Sharp » ; **C** : « la calculatrice est de marque Casio »
T : « la calculatrice est de marque TI » ; **P** : « la calculatrice est programmable »

1) a. Calculer les probabilités de chacun des événements suivants : $P \cap S$, $P \cap C$, $P \cap T$.

b. En déduire que p(P) = 0,56

2) La calculatrice choisie est programmable, calculer la probabilité quelle soit de marque Sharp.

3) On considère un lot de 10 calculatrices.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de calculatrices programmables.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.

c. Calculer la probabilité d'avoir au plus 9 calculatrices programmables.

4) On suppose que la durée de vie T d'une calculatrice suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}125$

a. Calculer la probabilité qu'une calculatrice ait une durée de vie supérieur à 8 ans ?

b. Calculer la probabilité qu'une calculatrice ait une durée de vie inferieur à 36 ans ?

c. On sait qu'une calculatrice a déjà fonctionné 4 ans. Quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne avant 10 ans ?

d. Un lycée commande n calculatrices ($n \geq 2$) .On suppose que la duré de vie d'une calculatrice est indépendante de la durée de vie des autres. Calculer la probabilité p_n qu'au moins une calculatrice ait une durée de vie inferieur à 8 ans puis déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0{,}125$

❖ **Exercice n° :03**

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) : \; y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

1) Soit g et h deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, verifiant pour tout reel x , $g(x) = h(x)e^{-x}$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si , pour tout x réel , $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$

b. Déterminer alors la fonction h sachant que h(0) =0 , puis déterminer la fonction g.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\boldsymbol{f}$ est solution de (E_n) si et seulement si $(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})$ est solution de l'équation (E) :

$$y' + y = 0$$

b. Résoudre (E)

c. Déterminer la solution générale $\boldsymbol{f_k}$ de l'équation (E_n)

d. Déterminer la solution $\boldsymbol{f}$ de l'équation (E_n) vérifiant f(0) = 0

3) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{6}e^{-x}$

On désigne par $(C_u)\; et (C_v)$ les representations graphiques de u et v dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,i,j)

Calculer l'aire de la parti du plan limitée par (C_u) , (C_v) et les droites d'équations : x = 0 et x = 1

❖ **Exercice n° :04**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC] .

1) Déterminer le volume du tétraèdre $OABC$.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MI = MJ$.

a. Montrer que P est le plan d'équation : $2x - 4z + 3 = 0$.

b. Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera. .

3) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$de l'espace tels que : $x^2+y^2 + z^2 - \frac{3}{2}z - 5 = 0$.

a. Montrer que S est la sphère de centre K dont on déterminera le rayon.

b. Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphèreS .

c. Montrer que S est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC) .

4) Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère S .