L.S.M Elmesaadi Elfahs	Devoir de synthèse n°3	Prof : Ben Hmidene Tarak	
2014-2015	Mathématiques	4éme math	Durée :4H

Exercice n°1(3 points)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1) a) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation

$$(E) : 8x - 5y = 3.$$

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers

Vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$. Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E)

et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c)Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2) Soit n un nombre entier naturel.

a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$(modulo 7).

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2015} - 1$ par 7

Exercice n°2(6 points)

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]0 , +\infty[$ par $f(x) = (1 - \ln x)^2$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e , +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de $[e , +\infty[$ sur $[0 , +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0 , +\infty[$ $g^{-1}(x) = e^{(1+\sqrt{x})}$

3) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé du plan.

Partie B :

Pour tout n de IN^*, on pose $I_n = \int_1^e (1 - \ln x)^n \, dx$

1) Calculer I_1

. 2) Montrer que pour tout n de IN^* on a $I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$

3) On désigne par A et B les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et e.

Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de la courbe

(Cf) autour de l'axe (O, $\vec{i}$)

4) Montrer que la suite I est décroissante et que pour tout n de IN^* on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

5) On pose pour tout n de IN^* $u_n = \frac{I_n}{n!}$

a) Montrer que pour tout n de IN^* $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$

b) Déduire que pour tout n de IN^* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e - u_n$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

Exercice n°3(4 points)

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1980 et 2010.

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers habitants y	18	21	25	30	36	42	50

1)a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.

b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (X, Y).

2)a)Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième.).
b) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2008, à un millier près.
3) L'allure du nuage de la série double (X, Y) incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur [0 ; +∞ [définie par $f(x) = 18e^{0,039x}$.
a) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2008, à un millier près.
b) La population en 2008 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent? Justifier votre choix.
c) Déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint 59 milliers.

Exercice n°4:(4 points)

Une étude statistique effectuée sur les jeunes d'un pays a donné les résultats suivants :

*45% sont des filles et 55% sont des garçons.

*Parmi les filles 90% ont terminé leurs études supérieures.

**Parmi les garçons 80 % ont terminé leurs études supérieures.*

On choisie une personne au hasard .On note les événements suivants

F « La personne choisie est une fille »   G « la personne choisie est un garçon »

S « la personne choisie a terminé ses études supérieures »

1) Construire un arbre de probabilité modalisant ces résultats.

2) Calculer la probabilité des ces événements :

a)A : la personne choisie est un garçon et qui a terminé ses études supérieures.

b) B : la personne choisie est une fille et qui n'a pas terminé ses études supérieures.

3) Monter que p(S) = 0,845.

4) Quelle est la probabilité que la personne choisie est un garçon sachant qu'il a terminé ses études supérieures.

5) On interroge indépendamment 5 personnes. Quelle est la probabilité que :

a) Au plus deux personnes ont terminé leurs études supérieures

b) Au moins une personne a terminé ses études supérieures.

6) On choisie ensuite n personnes (n € IN) .*

Quel est le nombre minimal des personnes interrogées pour que la probabilité qu' au moins une personne a terminé ses études supérieures soit supérieur strictement à 0,9.

Exercice n°5(points)

on considère les équation différentielles

(E) : Y' + Y = $\frac{x^2}{2} e^{-x}$ *et (E') : Y' + Y = 0*

Soient g la fonction, définie et dérivable sur IR par g (x)= $\frac{x3}{6} e^{-x}$

a) Montrer que g est solution de (E)

b)Résoudre (E')

2) Soit f une fonction dérivable surIR.

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f − g est solution de l'équation: (E')

c) Déterminer la solution générale f de l'équation (E).

d) Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant f (0) = 0.

Dans la figure ci-joint on la représentation graphique de deux fonctions u et v définies par

$U(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}$, $V(x) = \frac{x3}{6} e^{-x}$ et D est le domaine limite par (Cu) , (C v) et les droites d'équations respectives x = 0 , x = 1

Calculer l'aire du domaine D sans faire une intégration par partie