## Exercice 1

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut $a$ et le défaut $b$. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes. On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
   On note $A$ l'évènement « le sac présente le défaut $a$ » et $B$ l'évènement « le sac présente le défaut $b$ ». Les probabilités des évènements $A$ et $B$ sont respectivement $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$ ; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.
   a. Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut $a$ et le défaut $b$ ».
   b. Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».
   c. Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».
   d. Sachant que le sac présente le défaut $a$, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut $b$ ?
2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.
   On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $X$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.
   a. Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
   c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

## Exercice 2

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.
   On choisit, au hasard, un élève du lycée.
   Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.
   Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.
3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
   Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à $10^{-3}$.
4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
   On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
   On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
   On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.
   On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

## Exercice 3

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Le paramètre $\lambda$ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6. Montrer qu'une valeur approchée de $\lambda$ à $10^{-3}$ près est 0,131.

   **Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de $\lambda$ et les résultats seront donnés à $10^{-2}$ près.**
2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   - **a.** Quelle est la loi suivie par Y ?
   - **b.** Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   - **c.** Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

## Exercice 4

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant $t$ est égale à

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1. Déterminer $\lambda$, arrondi à $10^{-1}$ près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3. **Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.**
2. À quel instant $t$, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à $10^{-2}$ près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

## Exercice 5

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.
Tous les résultats seront arrondis à $10^{-3}$

### Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

### Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ où $\lambda$, est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout réel positif $t$, $p(Y \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à $10^{-3}$.

1. Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de $\lambda$. En déduire la valeur de $\lambda$.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$ .
2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
4. On admet que la durée de vie moyenne $d_m$ de ces moteurs est égale à $\lim_{t\to+\infty} F(t)$ où $F$ est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.



## Exercice 6

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue $n$ tirs supposés indépendants. On désigne par $p_n$ la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces $n$ tirs.
   La valeur minimale de $n$ pour que $p_n$ soit supérieure ou égale à 0,9 est :
   **a)** 6 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 12
2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire $X$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant $t$ est $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda^{-\lambda x}\,dx$.
   La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :
   **a)** 0,271 **b)** 0,135 **c)** 0,865 **d)** 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.
La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

**a)** $\dfrac{125}{3888}$ **b)** $\dfrac{625}{648}$ **c)** $\dfrac{25}{7776}$ **d)** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient $A$ et $B$ deux évènements indépendants d'une même univers $\Omega$ tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(A \cup B) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement $B$ est :

**a)** 0,5 **b)** 0,35 **c)** 0,46 **d)** 0,7

## Exercice 7

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda$ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année $t$ ($t$ positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0\,;\,t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1. Restitution organisée de connaissances
Pré-requis :
   **a.** $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où $A$ et $B$ sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;
   **b.** $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où $A$ est un évènement) ;
   **c.** $p([a\,;\,b]) = F(b) - F(a)$ (où $a$ et $b$ sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

   Démontrer que, pour tout nombre réel positif $s$, on a :

$$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)},$$

   et que $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel $t$.

   *Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.*

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0{,}4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.
Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.
   **a.** Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.
   **b.** Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

## Exercice 8

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.
L'une $U_1$ contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne $U_2$ contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne $U_1$, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne $U_2$ le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les évènements suivants :

$J_1$ « le jeton tiré de l'urne $U_1$ porte le numéro 1 »

$J_2$ « le jeton tiré de l'urne $U_1$ porte le numéro 2 »

$J_3$ « le jeton tiré de l'urne $U_1$ porte le numéro 3 »

$J_4$ « le jeton tiré de l'urne $U_1$ porte le numéro 4 »

$B$ « toutes les boules tirées de l'urne $U_2$ sont blanches »

*On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question* **4.b)** *où une valeur arrondie à* $10^{-2}$ *suffit.*

1. Calculer $P_{J_1}(B)$, probabilité de l'évènement $B$ sachant que l'évènement $J_1$ est réalisé.
   Calculer de même la probabilité $P_{J_2}(B)$.
   On admet dans la suite les résultats suivants :
   $$P_{J_3}(B)=\frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B)=\frac{1}{210}$$
2. Montrer que $P(B)$, probabilité de l'évènement $B$, vaut $\frac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?
4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note $N$ la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.
   **a.** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $N$ ?
   **b.** Calculer la probabilité de l'évènement $(N=3)$.

## Exercice 9

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

**Les questions 1. et 2. sont indépendantes**

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   **a.** Vérifier que $P(X=0)=\frac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.
   **b.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.
   **c.** Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   *si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.*
   **a.** En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :
   B : « seule la première boule tirée est verte »,
   C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
   **b.** Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

## Exercice 10

**Les parties A et B sont indépendantes**

### Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?



### Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel $t$ positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à $t$ années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

1. Déterminer $\lambda$ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.
2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
   Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?
3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.
   **a.** On considère un lot de 10 ordinateurs.
   Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
   **b.** Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

## Exercice 11

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.
   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.
3. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On effectue $n$ tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).
   **a.** Exprimer en fonction de $n$ la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des $n$ tirages.
   **b.** Déterminer l'entier $n$ à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des $n$ tirages est supérieure ou égale à 0,99.