ECERCICE N°1

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1°) On extrait simultanément trois boules de cette urne. On suppose tous les tirages équiprobables.
Soit X la variable aléatoire «nombre de boules blanches parmi les trois boules extraites».
Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.

2°) On extrait successivement trois boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite dans l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables.
Soit Y la variable aléatoire «nombre de tirages où apparaît une boule blanche».
Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique et son écart-type.

CORRECTION ECERCICE N°1

1°) L'univers Ω est l'ensemble des tirages simultanés de trois boules de l'urne.
On suppose tous les tirages (événements élémentaires) équiprobables.
On sait, dans ce cas, que la probabilité d'un événement A est donnée par :
$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$
Sachant qu'il y a six boules dans l'urne, et qu'on fait un tirage simultané de trois boules, on a :
$\text{card } \Omega = \binom{6}{3} = 20$ (nombre de parties à 3 éléments dans un ensemble de 6 éléments).

X est la variable aléatoire «nombre de boules blanches parmi les trois boules extraites». Comme il y a deux boules blanches dans l'urne, le nombre de boules blanches tirées peut être égal à 0, 1 ou 2.
On a $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$.
Déterminer la loi de probabilité de X, c'est donner les valeurs de :
$p(X = 0)$; $p(X = 1)$; $p(X = 2)$.

$(X = 0)$ est l'événement : «aucune boule blanche parmi les trois tirées».
Le nombre de tirages de trois boules ne comportant aucune boule blanche est alors le nombre de tirages de trois boules parmi les quatre boules qui ne sont pas blanches (une rouge et trois noires).
Comme il s'agit d'un tirage simultané, on a :
$\text{card } (X = 0) = \binom{4}{3} = 4$

Donc $p(X = 0) = \frac{\text{card } (X = 0)}{\text{card } \Omega} = \frac{4}{20}$ $\boxed{p(X = 0) = \frac{1}{5}}$

$(X = 1)$ est l'événement : «exactement une boule blanche parmi les trois».
Les tirages de trois boules comportant exactement une boule blanche sont les tirages comportant une boule blanche et deux boules qui ne sont pas blanches.
Comme il s'agit d'un tirage simultané, on a :
$\text{card } (X = 1) = \binom{2}{1} \times \binom{4}{2} = 2 \times 6 = 12$ (On choisit 1 blanche parmi 2 et 2 non blanches parmi 4).

Donc $p(X = 1) = \frac{\text{card } (X = 1)}{\text{card } \Omega} = \frac{12}{20}$ $\boxed{p(X = 1) = \frac{3}{5}}$

2°) L'univers Ω est l'ensemble des tirages successifs et avec remise de trois boules de l'urne.

Y est la variable aléatoire «nombre de tirages où apparaît une boule blanche». Puisqu'on remet la boule dans l'urne après chaque tirage, le nombre de boules blanches tirées peut être égal à 0, 1, 2 ou 3.

On a $Y(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

La variable aléatoire Y correspond à un schéma de Bernouilli.

Pour chaque tirage la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{1}{3}$.

La loi de probabilité de Y est une loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{3}$ et $n = 3$

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 3$, on a $p(Y = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$

Donc $p(Y = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; $p(Y = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$

$p(Y = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$; $p(Y = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$

La loi de probabilité de Y est donnée par :

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$	$\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

On peut vérifier que $p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) + p(Y = 3) = 1$

L'espérance mathématique de X est :

$E(Y) = 0 \times p(Y = 0) + 1 \times p(Y = 1) + 2 \times p(Y = 2) + 3 \times p(Y = 3)$

Donc $E(Y) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{12}{27} + 2 \times \frac{6}{27} + 3 \times \frac{1}{27} = \frac{27}{27}$ $\boxed{E(Y) = 1}$

La variance de Y est :

$V(Y) = 0^2 \times p(Y = 0) + 1^2 \times p(Y = 1) + 2^2 \times p(Y = 2) + 3^2 \times p(Y = 3) - [E(Y)]^2$

Donc $V(Y) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{12}{27} + 4 \times \frac{6}{27} + 9 \times \frac{1}{27} - 1 = \frac{2}{3}$

L'écart-type est $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$ donc $\boxed{\sigma(Y) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$; $\sigma(Y) \approx 0{,}82$

Autre méthode :

On suppose tous les tirages équiprobables.

On sait, dans ce cas, que la probabilité d'un événement A est donnée par :

$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$

Sachant qu'il y a six boules dans l'urne, et qu'on fait un tirage successif et avec remise de trois boules, on a : card $\Omega = 6 \times 6 \times 6 = 216$

$(Y = 0)$ est l'événement : «aucune boule blanche parmi les trois tirées».

On prend donc, à chacun des trois tirages, une boule parmi les quatre qui ne sont pas blanches. card $(Y = 0) = 4 \times 4 \times 4 = 64$

Donc $p(Y = 0) = \frac{\text{card } (Y = 0)}{\text{card } \Omega} = \frac{64}{216}$ $\boxed{p(Y = 0) = \frac{8}{27}}$

$(Y = 1)$ est l'événement : «exactement une boule blanche parmi les trois».

La boule blanche peut être tirée en 1ère, en 2ème, ou en 3ème position.

On peut donc décomposer l'événement $(Y = 1)$ en une réunion de trois événements deux à deux incompatibles :

$E_1 : B, \overline{B}, \overline{B}$ (une blanche, une non-blanche, une non blanche)

$E_2 : \overline{B}, B, \overline{B}$

$E_3 : \overline{B}, \overline{B}, B$

avec card $E_1 = 2 \times 4 \times 4 = 32$; card $E_2 = 4 \times 2 \times 4 = 32$; card $E_3 = 2 \times 4 \times 4 = 32$

Donc card$(Y = 1) = 3 \times 32 = 96$ et $\boxed{p(Y = 1) = \frac{96}{216} = \frac{12}{27}}$

$(Y = 2)$ est l'événement : «exactement deux boules blanches parmi les trois».

La boule non blanche peut être tirée en 1ère, en 2ème, ou en 3ème position.

On peut donc décomposer l'événement $(Y = 2)$ en une réunion de trois événements deux à deux incompatibles :

$F_1 : \overline{B}, B, B$ $F_2 : B, \overline{B}, B$ $F_3 : B, B, \overline{B}$

avec card $F_1 = 4 \times 2 \times 2 = 16$; card $F_2 = 2 \times 4 \times 2 = 16$; card $F_3 = 2 \times 2 \times 4 = 16$

Donc card$(Y = 2) = 3 \times 16 = 48$ et $\boxed{p(Y = 2) = \frac{48}{216} = \frac{6}{27}}$

$(Y = 3)$ est l'événement : «trois boules blanches parmi les trois tirées».

card $(Y = 3) = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $\boxed{p(Y = 3) = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}}$

ECERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

1°) Calculer $f'(x)$ et démontrer que $f''(x) = (x-2)^2\, e^{-x}$

2°) Démontrer que : pour tout $x \in [1\,;2]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$

puis démontrer que : pour tout $x \in [1\,;2]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$

3°) Soient a et b deux réels dans $[1\,;2]$.

a) Démontrer que si $a \leqslant b$, $0 \leqslant \int_a^b f'(t)\,dt \leqslant \frac{3}{4}(b-a)$.

b) En déduire que $|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{3}{4}|b-a|$.

4°) En utilisant la fonction h définie sur $[1\,;2]$ par $h(x) = f(x) - x$, démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[1\,;2]$.

5°) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

e) Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 on ait $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-2}$

CORRECTION ECERCICE N°2

1°) f est la fonction définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

f est la somme et le produit de fonctions dérivables sur IR, donc f est dérivable sur IR et on a :

$f'(x) = 1 + (2x)e^{-x} + (x^2+2)(-e^{-x}) = 1 + (2x - x^2 - 2)e^{-x}$

donc $\boxed{f'(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$

f' est la somme et le produit de fonctions dérivables sur IR, donc f' est dérivable sur IR et on a :

$f''(x) = -(2x-2)e^{-x} - (x^2 - 2x + 2)(-e^{-x}) = (-2x + 2 + x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

donc $f''(x) = (x^2 - 4x + 4)e^{-x}$ pour tout $x \in$ IR

c'est-à-dire $\boxed{f''(x) = (x-2)^2\, e^{-x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$

2°) On sait que la fonction exponentielle est strictement positive sur IR et qu'un carré est toujours positif, donc $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$ IR.

La fonction f' est donc croissante sur IR.

Alors si $1 \leqslant x \leqslant 2$, on a $f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(2)$

$f'(1) = 1 - (1 - 2 + 2)e^{-1} = 1 - e^{-1} \geqslant 0$ ($1 - e^{-1} \approx 0{,}63$ à 10^{-2} près)

et $f'(2) = 1 - (4 - 4 + 2)e^{-2} = 1 - 2e^{-2} \leqslant \frac{3}{4}$ ($1 - 2e^{-2} \approx 0{,}72$ à 10^{-2} près)

Alors si $1 \leqslant x \leqslant 2$, on a $0 \leqslant f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(2) \leqslant \frac{3}{4}$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in [1\,;2] ,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{4}}$

$f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [1\,;2]$, par conséquent f est croissante sur $[1\,;2]$

Alors $1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$

$f(1) = 1 - 1 + (1+2)e^{-1} = 3e^{-1} \geqslant 1$ ($3e^{-1} \approx 1{,}10$ à 10^{-2} près)

$f(2) = 2 - 1 + (4+2)e^{-2} = 1 + 6e^{-2} \leqslant 2$ ($1 + 6e^{-2} \approx 1{,}81$ à 10^{-2} près)

Alors si $1 \leqslant x \leqslant 2$, on a $1 \leqslant f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2) \leqslant 2$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in [1\,;2] ,\ 1 \leqslant f(x) \leqslant 2}$

3°) a) a et b sont deux réels de l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, on a donc $0 \leq f'(t) \leq \frac{3}{4}$ pour tout $t \in [a\ ;\ b]$.

Les fonctions $t \mapsto f'(t)$; $t \mapsto 0$ et $t \mapsto \frac{3}{4}$ ont des primitives sur $[a\ ;\ b]$, et $a \leq b$, donc $\int_a^b 0\,dt \leq \int_a^b f'(t)\,dt \leq \int_a^b \frac{3}{4}\,dt$

c'est-à-dire $\left[0\right]_a^b \leq \int_a^b f'(t)\,dt \leq \left[\frac{3}{4}t\right]_a^b$

donc $\boxed{0 \leq \int_a^b f'(t)\,dt \leq \frac{3}{4}(b-a)}$.

3°) b) Pour $a \leq b$, on obtient donc $0 \leq \left[f(t)\right]_a^b \leq \frac{3}{4}(b-a)$, donc

$0 \leq f(b) - f(a) \leq \frac{3}{4}(b-a)$ et par conséquent $|f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b-a|$.

Si $a \geq b$, on a $b \leq a$, et en utilisant le résultat précédent, on en déduit $|f(a) - f(b)| \leq \frac{3}{4}|a-b|$.

Comme on sait que $|f(a) - f(b)| = |f(b) - f(a)|$ et $|a-b| = |b-a|$,

on a donc obtenu : $\boxed{|f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b-a| \quad \text{pour } a \text{ et } b \text{ dans } [1\ ;\ 2]}$.

4°) La fonction h est définie sur $[1\ ;\ 2]$ par $h(x) = f(x) - x$

h est dérivable sur $[1\ ;\ 2]$ et on a $h'(x) = f'(x) - 1$.

On sait que $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$ pour tout $x \in [1\ ;\ 2]$,

donc $-1 \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{4}$, donc $-1 \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}$ pour tout $x \in [1;2]$

h est donc continue et strictement décroissante sur $[1\ ;\ 2]$, donc pour tout $k \in [h(2)\ ;\ h(1)]$, l'équation $h(x) = k$ a une solution unique dans $[1\ ;\ 2]$

$h(2) = f(2) - 2 \leq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \geq 0$ donc $0 \in [h(2)\ ;\ h(1)]$

Par conséquent l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique α dans $[1\ ;\ 2]$.

On peut remarquer que : $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ a donc une solution unique } \alpha \text{ dans } [1\ ;\ 2]}$

5°) (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Considérons la proposition $P(n)$: $1 \leq u_n \leq 2$

On sait que $u_0 = 1$, donc la proposition $P(0)$ est vraie.

Supposons que la proposition $P(n)$ est vraie pour un entier n fixé ($n \in \mathbb{N}$).
Alors on a $1 \leq u_n \leq 2$.

D'après le résultat du 2°), on en déduit que $1 \leq f(u_n) \leq 2$,

c'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 2$, ce qui revient à dire que $P(n+1)$ est vraie

On a donc démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(n)$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors $P(n+1)$ est vraie.

On peut conclure, en utilisant le raisonnement par récurrence que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc $\boxed{1 \leq u_n \leq 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

5°) b) On a vu au **3°)b)** que $|f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b-a|$ pour a et b dans $[1\ ;\ 2]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1\ ;\ 2]$, et on sait que $\alpha \in [1\ ;\ 2]$

donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

Or par définition on a $f(u_n) = u_{n+1}$ et on a vu que $f(\alpha) = \alpha$.

On obtient alors $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

5°)c) Considérons la proposition $Q(n)$: $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$

On sait que $u_0 = 1$ et que $\alpha \in [1\,;2]$.

On en déduit que $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$, or on a $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ donc $|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^0$

La proposition $Q(0)$ est vraie.
Supposons que la proposition $Q(n)$ est vraie pour un entier n fixé ($n \in \mathbb{N}$).

Alors on a $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Comme on a vu que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$, on en déduit que

$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

ce qui revient à dire que la proposition $Q(n+1)$ est vraie.

On peut conclure, en utilisant le raisonnement par récurrence que la proposition $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc $\boxed{|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

5°) d) On a $-1 < \frac{3}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

5°) e) On sait que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour obtenir $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-2}$, il suffit donc de choisir n tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-2}$

On a $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-2} \iff \ln\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant \ln 10^{-2}$ (la fonction $\ln$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$)

$\iff n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant -2 \ln 10$

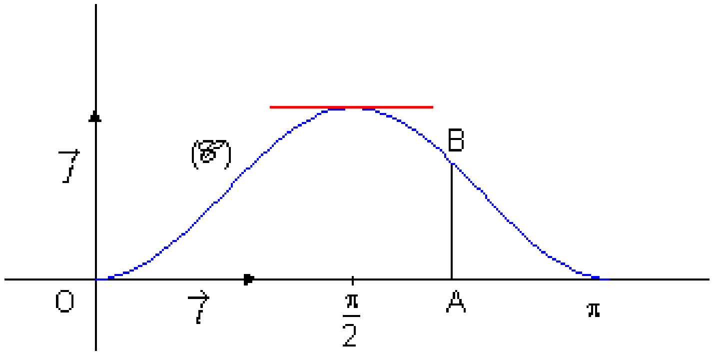
$\iff n \geqslant \frac{-2 \ln 10}{\ln 3 - \ln 4}$ ($\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - \ln 4 < 0$)

On a $\frac{-2 \ln 10}{\ln 3 - \ln 4} \approx 16{,}008$ (à 10^{-3} près), on peut donc prendre $\boxed{n_0 = 17}$

ECERCICE N°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 1 cm)
La courbe $(\mathscr{C})$ représente la fonction f définie par $f(x) = \sin^2 x$, $x \in [0\,;\pi]$.

Le domaine $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $M(x\,,y)$ du plan tels que $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$



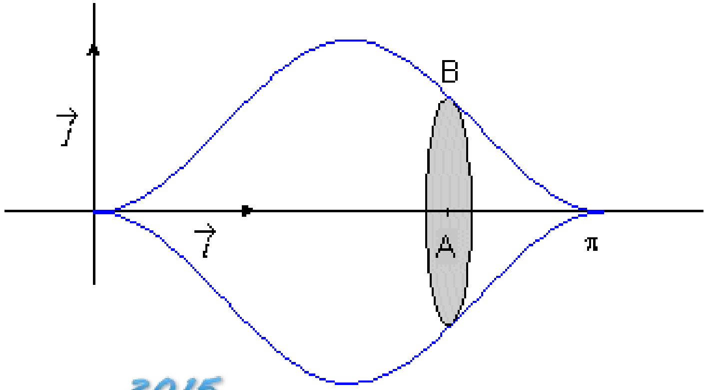
1°) Calculer l'aire, en cm^2, du domaine $\mathscr{D}$.

2°) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos 4x - 4\cos 2x + 3 = 8\sin^4 x$

En déduire $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$.

3°) a) Pour x appartenant à $[0\,;\pi]$, on considère les points A et B d'abscisses x, A appartenant à l'axe $(O;\vec{i})$ et B appartenant à la courbe $(\mathscr{C})$.
Le segment [AB] pivotant autour de l'axe $(O;\vec{i})$ engendre un disque dans l'espace. Exprimer l'aire en cm^2 de ce disque en fonction de x.

b) En déduire le volume en cm^3 du solide obtenu par rotation de la courbe $(\mathscr{C})$ autour de l'axe des abscisses.



CORRECTION ECERCICE N°3

1°) f est définie par $f(x) = \sin^2 x$, $x \in [0\,;\,\pi]$.

La fonction f est positive et elle a des primitives sur $[0\,;\,\pi]$ (car elle est dérivable). L'aire, en cm^2, du domaine $\mathscr{D}$ est donnée par :

$$A = \int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$A = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi - \left(0 - \frac{1}{4}\sin 0\right).$$ Donc $\boxed{A = \frac{1}{2}\pi \quad (\text{cm}^2)}$.

2°) Pour tout réel a, on sait que : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

Alors $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\,(1 - 2\sin^2 x)^2 - 1 = 2 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x - 1$

et $-4\cos 2x = -4(1 - 2\sin^2 x) = -4 + 8\sin^2 x$.

On en déduit :

$\cos 4x - 4\cos 2x + 3 = 2 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x - 1 - 4 + 8\sin^2 x + 3$

c'est-à-dire : $\boxed{\cos 4x - 4\cos 2x + 3 = 8\sin^4 x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

On a alors $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

et par conséquent :

$$\int_0^\pi \sin^4 x\, dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^\pi$$

donc $\int_0^\pi \sin^4 x\, dx = \left(\frac{1}{32}\sin 4\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi + \frac{3}{8}\pi\right) - \left(\frac{1}{32}\sin 0 - \frac{1}{4}\sin 0 + 0\right)$

donc $\boxed{\int_0^\pi \sin^4 x\, dx = \frac{3}{8}\pi}$.

3°) a) AB a pour longueur $|f(x)| = \sin^2 x$.

L'aire du disque de rayon AB, en cm^2 est donc $\boxed{A(x) = \pi \sin^4 x}$.

3°) b) Le volume engendré par rotation de la courbe $(\mathscr{C})$ autour de l'axe des abscisses est donné en cm^3 par

$V = \int_0^\pi S(x)\, dx$, ou $S(x)$ est la l'aire de section du volume V avec le plan parallèle à yOz à l'abscisse x , c'est-à-dire l'aire $A(x)$.

On a donc $V = \int_0^\pi \pi \sin^4 x\, dx = \pi \int_0^\pi \sin^4 x\, dx = \pi \times \frac{3}{8}\pi$

donc $\boxed{V = \frac{3}{8}\pi^2 \quad (\text{cm}^3)}$.

ECERCICE N°4

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Justifier que (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel.

Partie B

On considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{(\ell n\, x)^n}{x^2}$

On pose $I_n = \int_1^e f_n(x)\,dx$

1°) Démontrer que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$

2°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

3°) Calculer I_2

4°) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

5°) Montrer que la suite (I_n) est convergente.
Déterminer sa limite (on pourra utiliser le résultat de la question **2°)**).

6°) En utilisant le résultat de la question **2°)**, montrer par récurrence que :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} u_n$
où (u_n) est la suite définie dans la partie A.

7°) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

CORRECTION ECERCICE N°4

Partie A

On a : $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!}$

Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (u_n) est une suite croissante.

On a : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$

Comme $n \geqslant 1$, on a donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (v_n) est une suite décroissante.

On a de plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

(u_n) est une suite croissante, (v_n) est une suite décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$,

donc : $\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$.

On sait que deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Donc : $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers un même réel}}$.

Partie B

f_n est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{(\ell n\, x)^n}{x^2}$ et $I_n=\displaystyle\int_1^e f_n(x)\,dx$ $n\in\mathbb{N}^*$

1°) On a $I_1=\displaystyle\int_1^e f_1(x)\,dx=\int_1^e \frac{\ell n\, x}{x^2}\,dx$

Intégrons par parties en posant $u'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $v(x)=\ell n\, x$

$u(x)=-\dfrac{1}{x}$ $v'(x)=\dfrac{1}{x}$

Les fonctions u, v, u', v' sont continues sur $[1\,;e]$.
On obtient alors :

$$I_1=\left[-\frac{1}{x}\,\ell n\, x\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\,\ell n\, x\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$I_1=\left[-\frac{1}{x}\,\ell n\, x-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{1}{e}\,\ell n\, e-\frac{1}{e}+\frac{1}{1}\,\ell n\,1+1=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1$$

donc $\boxed{I_1=1-\dfrac{2}{e}}$.

2°) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=\displaystyle\int_1^e f_{n+1}(x)dx=\int_1^e\frac{(\ell n\, x)^{n+1}}{x^2}\,dx=\int_1^e\frac{1}{x^2}\,(\ell n\, x)^{n+1}dx$

Intégrons par parties en posant $u'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $v(x)=(\ell n\, x)^{n+1}$

$u(x)=-\dfrac{1}{x}$ $v'(x)=(n+1)\,\dfrac{1}{x}\,(\ell n\, x)^n$

Les fonctions u, v, u', v' sont continues sur $[1\,;e]$.
On obtient alors :

$$I_{n+1}=\left[-\frac{1}{x}\,(\ell n\, x)^{n+1}\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)(n+1)\,\frac{1}{x}\,(\ell n\, x)^n\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x}\,(\ell n\, x)^{n+1}\right]_1^e+\int_1^e(n+1)\,\frac{(\ell n\, x)^n}{x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{e}\,(\ell n\, e)^{n+1}+\frac{1}{1}\,(\ell n\,1)^{n+1}+(n+1)\int_1^e\frac{(\ell n\, x)^n}{x^2}\,dx$$

$=-\dfrac{1}{e}+0+(n+1)I_n$ donc $\boxed{I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*}$

3°) On utilise la relation de récurrence vue à la question précédente :
pour $n=1$, on peut écrire : $I_2=-\dfrac{1}{e}+2\,I_1$

On a vu que $I_1=1-\dfrac{2}{e}$

Donc $I_2=-\dfrac{1}{e}+2\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$ donc $\boxed{I_2=2-\dfrac{5}{e}}$.

4°) On a $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_1^e f_{n+1}(x)dx-\int_1^e f_n(x)dx=\int_1^e(f_{n+1}(x)-f_n(x))\,dx$

Donc $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_1^e\left(\frac{(\ell n\, x)^{n+1}}{x^2}-\frac{(\ell n\, x)^n}{x^2}\right)dx=\int_1^e\frac{(\ell n\, x)^n\,(\ell n\, x-1)}{x^2}\,dx$

Pour $x\in[1\,;e]$, on a $0\leqslant \ell n\, x\leqslant 1$ (la fonction ℓn est croissante sur $]0\,;+\infty[$)

Donc $(\ell n\, x)^n\geqslant 0$ et $(\ell n\, x-1)\leqslant 0$. Par conséquent $\dfrac{(\ell n\, x)^n\,(\ell n\, x-1)}{x^2}\leqslant 0$

Comme $1\leqslant e$, on en déduit $\displaystyle\int_1^e\frac{(\ell n\, x)^n\,(\ell n\, x-1)}{x^2}\,dx\leqslant 0$

Donc $I_{n+1}\leqslant I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante}}$.

5°) On a $\dfrac{(\ell n\, x)^n}{x^2}\geqslant 0$ pour tout $x\in[1\,;e]$

Donc $\displaystyle\int_1^e\frac{(\ell n\, x)^n}{x^2}\,dx\geqslant 0$, c'est-à-dire $I_n\geqslant 0$.

La suite (I_n) est donc décroissante et minorée par 0.

Donc (I_n) est convergente.

Notons $\lambda=\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

On connait relation $I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Si λ était strictement positif, on aurait : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n=+\infty$

Si λ était strictement négatif, on aurait : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n=-\infty$

Or ceci serait en contradiction avec le fait que λ est un réel.

On a donc $\boxed{\lambda=0}$.

6°) Soit P(n) la proposition $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

La proposition P(1) s'écrit $\frac{1}{1!}I_1 = 1 - \frac{1}{e}u_1$ c'est-à-dire $I_1 = 1 - \frac{1}{e} \times \left(1 + \frac{1}{1!}\right)$

Soit $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

Le calcul fait au **1°)**, permet d'affirmer que la proposition P(1) est vraie.

Supposons que la proposition P(n) est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}u_n$

Calculons $\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1}$

En utilisant la relation du **2°)**, on peut écrire :

$$\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{e} + (n+1)I_n\right) = -\frac{1}{e} \times \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!}I_n$$

donc $\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = -\frac{1}{e} \times \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}I_n$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = -\frac{1}{e} \times \frac{1}{(n+1)!} + 1 - \frac{1}{e}u_n = 1 - \frac{1}{e}\left(u_n + \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

donc $\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}u_{n+1}$

c'est-à-dire que la proposition P(n+1) est vraie.

On a donc démontré que P(1) est vraie

et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P(n) $\Rightarrow$ P(n+1).

La proposition P(n) est donc démontrée par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a donc $\boxed{\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

7°) De l'égalité précédente on peut déduire que :

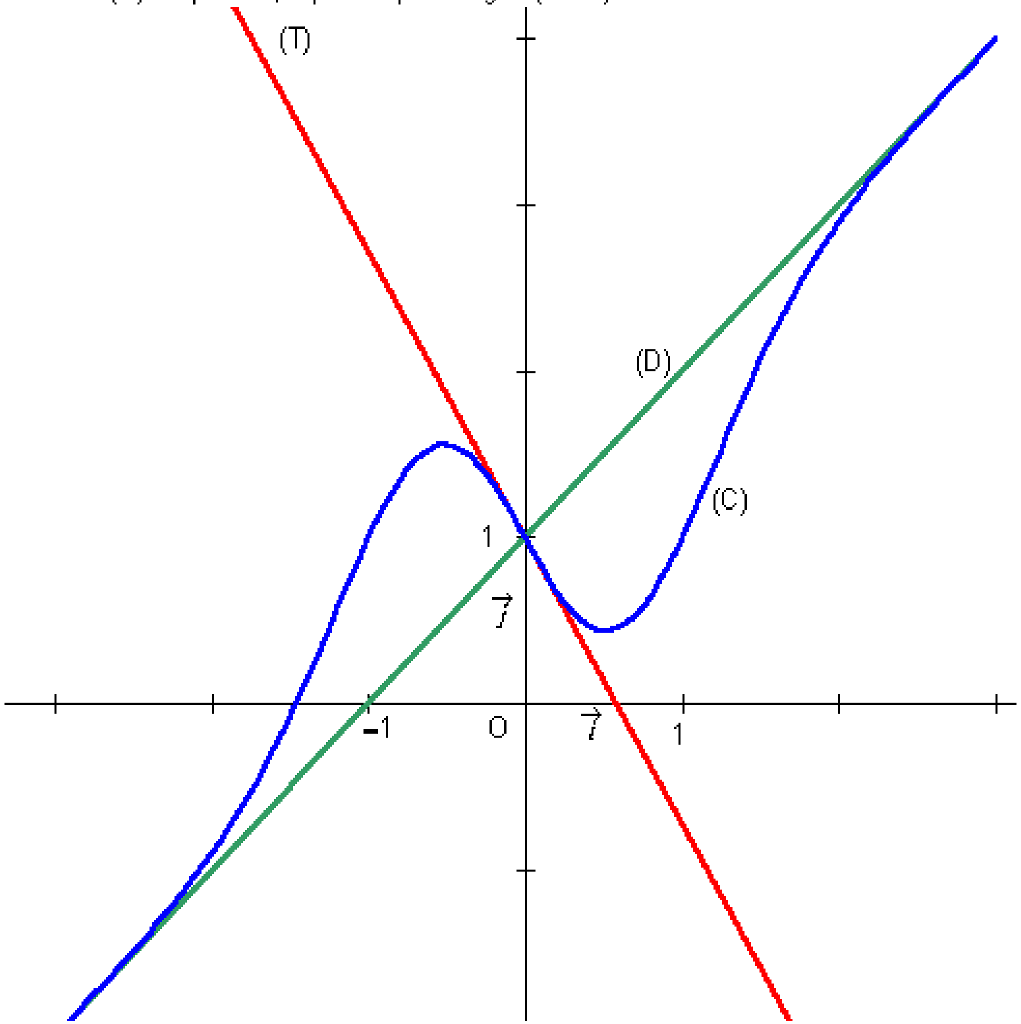
$\frac{1}{e}u_n = 1 - \frac{1}{n!}I_n$, donc $u_n = e\left(1 - \frac{1}{n!}I_n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On sait que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$. On en déduit : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e}$.

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} = e$

ECERCICE N°5

Sur la figure ci-dessous figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote D au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ et sa tangente T au point d'abscisse 0.
On sait que le point J(0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote D passe par les points K(-1 ; 0) et J, et que la tangente T à la courbe (C) au point J, a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.



Partie A

1°) Déterminer une équation de D.

2°) On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur IR telle que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p + \varphi(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

a) Déterminer m et p.

b) Montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire que la fonction φ est impaire puis que la fonction f', dérivée de f, est paire.

3°) On suppose maintenant que, pour tout réel x, $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$, où a et b sont des réels. Montrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que $a = -e$ et $b = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 1 + x - x\,e^{-x^2+1}$

et on suppose que la courbe (C) représente f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que, pour tout réel x, la dérivée f' de f vérifie :

$f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$.

Calculer $f'(0)$.

b) Vérifier que T est bien la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0. Étudier la position relative de la courbe C et de sa tangente T.

2°) Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur [0 ; 1].

a) Montrer que $f''(x)$ est du signe de $6x - 4x^3$.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1].

c) Montrer que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

d) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.

Partie C

Sur le graphique, la courbe (C) est très proche de son asymptote pour les points d'abscisse supérieure à 2,4. Cette partie propose de préciser cette situation en calculant, pour tout réel λ positif ou nul, l'aire $A(\lambda)$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par (C), D et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$.

1°) Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de λ.

2°) Déterminer la limite A de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

3°) A partir de quelle valeur de λ a-t-on $|A(\lambda) - A| \leqslant 10^{-2}$?

CORRECTION ECERCICE N°5

Partie A

1°) D passe par J(0 ; 1) et K(−1 ; 0).

Un point M(x ; y) appartient à D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{JM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si :

$x \times (-1) - (y-1) \times (-1) = 0 \iff -x + y - 1 = 0 \iff y = x + 1$

$\boxed{\text{La droite D a donc pour équation } \; y = x + 1}$

2°) a) S'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur IR telle que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p + \varphi(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, on a :

$f(x) - (mx + p) = \varphi(x)$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (mx + p) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

donc la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

Or (C) a pour asymptote en $+\infty$, la droite D d'équation $y = x + 1$

On a donc aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

On peut alors en déduire, par différence, que $\lim\limits_{x \to +\infty} (mx + p) - (x + 1) = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} (m-1)x + (p - 1) = 0$,

Ceci entraine nécessairement que : $\boxed{m = 1 \quad \text{et} \quad p = 1}$

2°) b) Soit M(x ; y) un point de (C), et M'(x' ; y') son symétrique par rapport à J.

J(0 ; 1) est le milieu de [MM'], donc $\dfrac{x + x'}{2} = 0$ et $\dfrac{y + y'}{2} = 1$.

On en déduit que $x' = -x$ et $y' = 2 - y$

La courbe (C) ayant pour centre de symétrie le point J, M' est aussi un point de (C). Par conséquent $y' = f(x') = f(-x)$.

Or on sait que $y' = 2 - y = 2 - f(x)$, donc $2 - f(x) = f(-x)$

On en déduit donc que $\boxed{f(x) + f(-x) = 2 \quad \text{pour tout réel } x}$

2°)c) L'ensemble de définition de φ est $\mathbb{R}$, il est symétrique par rapport à 0.
Pour tout réel x on peut écrire :
$\varphi(x) + \varphi(-x) = f(x) - x - 1 + f(-x) + x - 1 = f(x) + f(-x) - 2 = 0$
Donc $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ pour tout réel x

$\boxed{\varphi \text{ est donc une fonction impaire}}$.

f étant dérivable, φ définie par $\varphi(x) = f(x) - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Comme φ est impaire, on a $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
En dérivant, on obtient $\varphi'(x) + (-1)\varphi'(-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
donc $\varphi'(x) = \varphi'(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
On en déduit que la fonction φ' est une fonction paire.
On a $f(x) = \varphi(x) + x + 1$, donc $f'(x) = \varphi'(x) + 1$
Alors $f'(-x) = \varphi'(-x) + 1 = \varphi'(x) + 1 = f'(x)$ pour tout réel x.
L'ensemble de définition de f' est $\mathbb{R}$, il est symétrique par rapport à 0, et pour tout réel x, on a : $f'(-x) = f'(x)$

$\boxed{\text{La fonction } f' \text{ est une fonction paire}}$

3°) Supposons que $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
φ étant impaire, on a nécessairement $\varphi(0) = 0$.
donc $be^0 = 0$, donc $b = 0$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) = ax\,e^{-x^2}$.
Sachant que la tangente T à la courbe (C) au point J a pour équation $y = (1 - e)x + 1$, on peut dire que $f'(0) = 1 - e$
Comme on a vu que $\varphi'(x) = f'(x) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit
$\varphi'(0) = f'(0) - 1 = 1 - e - 1 = -e$.
D'autre part on sait que $\varphi(x) = ax\,e^{-x^2}$ donc
$\varphi'(x) = a\,e^{-x^2} + ax\,(-2x)\,e^{-x^2} = (-2ax^2 + a)\,e^{-x^2}$
Donc $\varphi'(0) = ae^0 = a$.
On en déduit alors que $a = \varphi'(0) = -e$ donc $a = -e$
On a donc nécessairement $\boxed{a = -e \text{ et } b = 0}$

Partie B

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x - x\,e^{-x^2+1}$

1°) a) f est la somme, le produit et la composée de fonctions dérivables, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$f'(x) = (1 + x)' - (x\,e^{-x^2+1})' = 1 - [1 \times e^{-x^2+1} + x \times (e^{-x^2+1})']$
$= 1 - e^{-x^2+1} - x \times (-x^2 + 1)'e^{-x^2+1} = 1 - e^{-x^2+1} - x \times (-2x)\,e^{-x^2+1}$

$\boxed{f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$

On a alors $f'(0) = 1 + (-1)e^1$ donc $\boxed{f'(0) = 1 - e}$

1°) b) Le point d'abscisse 0 de (C) a pour ordonnée $f(0) = 1$, c'est donc J.
La tangente en ce point a pour coefficient directeur $f'(0) = 1 - e$
C'est donc bien la droite d'équation $y = (1 - e)x + 1$.

$\boxed{\text{La tangente à (C) au point d'abscisse 0 est bien la droite T}}$.

Pour étudier la position relative de (C) et de T, étudions le signe de $f(x) - [(1 - e)x + 1]$.
$f(x) - [(1 - e)x + 1] = 1 + x - x\,e^{-x^2+1} - x + ex - 1 = ex - x\,e^{-x^2+1}$
$= ex - x\,e^{-x^2} \times e^1 = ex(1 - e^{-x^2})$
On sait que $-x^2 \leqslant 0$, donc $e^{-x^2} \leqslant 1$ ($x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$)

Donc $1 - e^{-x^2} \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On en déduit alors que $f(x) - [(1 - e)x + 1]$ est du signe de ex, c'est-à-dire du signe de x.
Donc $f(x) - [(1 - e)x + 1] \leqslant 0$ pour $x \leqslant 0$
et $f(x) - [(1 - e)x + 1] \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$
Alors $f(x) \leqslant (1 - e)x + 1$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) \geqslant (1 - e)x + 1$ pour $x \geqslant 0$

$\boxed{\text{(C) est au dessous de T pour } x \in \,]-\infty\,;0]}$

et $\boxed{\text{(C) est au-dessus de T pour } x \in [0\,;+\infty[}$

2°) a) On a $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$

Donc $f''(x) = 0 + 4x\, e^{-x^2+1} + (2x^2 - 1)(-2x)e^{-x^2+1}$

$= (4x - 4x^3 + 2x)e^{-x^2+1}$ donc $f''(x) = (6x - 4x^3)e^{-x^2+1}$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur IR, on en déduit que $\boxed{f''(x) \text{ est du signe de } 6x - 4x^3}$.

2°) b) On peut écrire $6x - 4x^3 = 2x(3 - 2x^2)$

Sur $]0\,;1[$, on a $2x > 0$

D'autre part le trinôme $3 - 2x^2$ a pour solutions $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$

D'après la règle du signe d'un trinôme du second degré, on peut affirmer que $3 - 2x^2 > 0$ pour $x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ et donc aussi pour $x \in\,]0\,;1[$.

On a donc $f''(x) > 0$ pour tout $x \in\,]0\,;1[$

La fonction f' est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$. On sait alors que pour tout $k \in [f'(0)\,;f'(1)]$, l'équation $f'(x) = k$ a une solution unique dans $[0\,;1]$.

On a $f'(0) = 1 - e < 0$ et $f'(1) = 2 > 0$

Donc $0 \in [f'(0)\,;f'(1)]$

$\boxed{\text{L'équation } f'(x) = 0 \text{ a donc une solution unique } \alpha \text{ dans } [0\,;1]}$.

2°) c) On a $f'(0{,}51) \approx -0{,}005$ à 10^{-3} près, donc $f'(0{,}51) < 0$

et $f'(0{,}52) \approx 0{,}047$ à 10^{-3} près, donc $f'(0{,}52) > 0$

On en déduit que $f'(0{,}51) < f'(\alpha) < f'(0{,}52)$

f' étant strictement croissante, on en déduit que : $\boxed{0{,}51 < \alpha < 0{,}52}$

2°) d) Par définition on a $f'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $1 + (2\alpha^2 - 1)e^{-\alpha^2+1} = 0$

donc $(2\alpha^2 - 1)e^{-\alpha^2+1} = -1$, donc $e^{-\alpha^2+1} = \dfrac{1}{1 - 2\alpha^2}$

Alors $f(\alpha) = 1 + \alpha - \alpha\, e^{-\alpha^2+1} = 1 + \alpha - \alpha\, \dfrac{1}{1 - 2\alpha^2}$

donc $f(\alpha) = \dfrac{1 - 2\alpha^2 + \alpha - 2\alpha^3 - \alpha}{1 - 2\alpha^2}$ donc $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{1 - 2\alpha^2 - 2\alpha^3}{1 - 2\alpha^2}}$

Partie C

1°) Pour $x \in [0\,;+\infty[$, on a $f(x) - (1 + x) = -x\,e^{-x^2+1} \leq 0$

Donc sur $[0\,;+\infty[$ la courbe (C) est au-dessous de D.

Les fonctions $x \mapsto (1 + x)$ et $x \mapsto f(x)$ ayant des primitives sur $[0\,;+\infty[$, l'aire $A(\lambda)$ est alors donnée en unités d'aire par :

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda [(1 + x) - f(x)]dx = \int_0^\lambda x\,e^{-x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^\lambda (-2x\,e^{-x^2+1})dx$$

On sait que toute fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ a pour primitive $x \mapsto e^{u(x)}$

donc $A(\lambda) = -\dfrac{1}{2}\left[e^{-x^2+1}\right]_0^\lambda = -\dfrac{1}{2}e^{-\lambda^2+1} + \dfrac{1}{2}e$ $\boxed{A(\lambda) = \dfrac{1}{2}e\left[1 - e^{-\lambda^2}\right]}$

2°) On a $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} -\lambda^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda^2} = 0$.

On en déduit alors que : $\boxed{A = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \dfrac{1}{2}e}$

3°) On a $A(\lambda) - A = -\dfrac{1}{2}e^{-\lambda^2+1}$, donc $|A(\lambda) - A| = \dfrac{1}{2}e^{-\lambda^2+1}$

donc $|A(\lambda) - A| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}e^{-\lambda^2+1} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow e^{-\lambda^2+1} \leq 2 \times 10^{-2}$

$\Leftrightarrow -\lambda^2 + 1 \leq \ln(2 \times 10^{-2})$ (la fonction $\ln$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$)

$\Leftrightarrow -\lambda^2 \leq -1 + \ln 2 - 2\ln 10 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 1 - \ln 2 + 2\ln 10$

Comme λ est un réel positif ou nul, on obtient $\lambda \geq \sqrt{1 - \ln 2 + 2\ln 10}$

donc $\boxed{|A(\lambda) - A| \leq 10^{-2} \text{ lorsque } \lambda \geq \sqrt{1 - \ln 2 + 2\ln 10}}$.