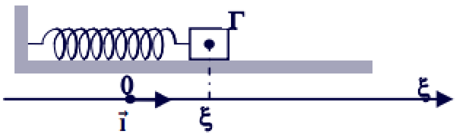
Mr Amine Touati

Oscillations mécanique libre

Exercice 1



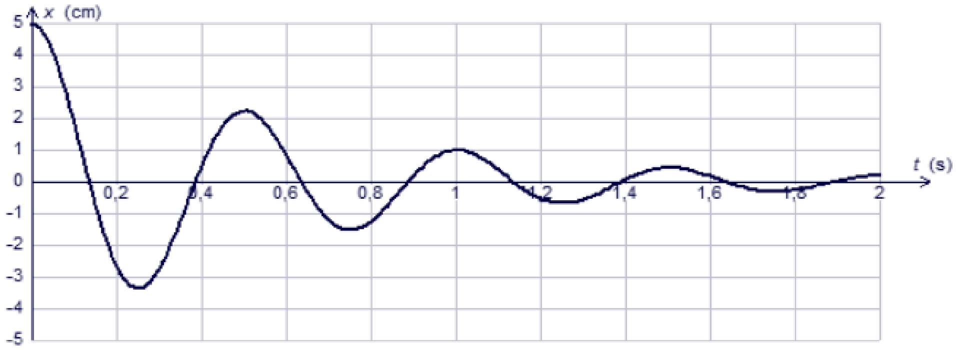
Un pendule élastique horizontal est formé par un ressort de raideur $\mathbf{k = 40\ N.m^{-1}}$ et un solide de masse $\mathbf{m}$. A l'instant $\mathbf{t = 0}$, le centre d'inertie $\mathbf{G}$ du solide est lancé à partir de la position $\mathbf{x_0 = 2,5}$ **cm** avec une vitesse initiale positive de $\mathbf{54,8\ cm.s^{-1}}$.

I / Les frottements sont supposés nuls.

1. **a.** A l'aide d'une figure explicative établir l'équation différentielle en fonction de l'élongation $\mathbf{x}$ du centre d'inertie **G** du solide.
   b. Donner une solution de cette équation différentielle et en déduire l'expression de la période propre $\mathbf{T_0}$ de l'oscillateur.
   c. La durée de **20** oscillations est $\mathbf{\Delta t = 10s}$. Montrer que la masse du solide vaut $\mathbf{m = 250g}$. et en déduire l'expression numérique de l'élongation **x** en fonction du temps.
2. **a.** Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.
   b. Déduire la vitesse de passage du solide par la position d'équilibre.

II / Les frottements sont maintenant équivalents à la force $\vec{\mathbf{f}} = -\mathbf{h}.\vec{\mathbf{v}}$.

1. La **figure 3** donne l'enregistrement du mouvement du centre d'inertie **G** du solide.



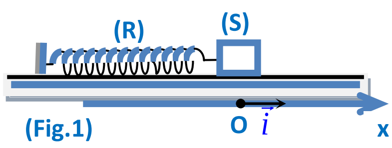
a. Que représente **h** et $\vec{\mathbf{v}}$?
b. Quelle est la nature du mouvement du centre d'inertie ? Justifier ?
c. Qu'appelle-t-on le régime d'oscillation du pendule.
d. Déterminer la pseudopériode **T**.

2. L'équation différentielle régissant le mouvement du solide est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3,2.\frac{dx}{dt} + 160.x = 0$$

a. Déduire la valeur de la pulsation propre et celle du coefficient de frottement **h** .
b. **E** est l'énergie mécanique du système **S={solide +ressort}**.Montrer que : $\frac{dE}{dt} = -hv^2$ Conclure
c. Calculer la variation de l'énergie mécanique de **S** entre les instants $\mathbf{t_0 = 0\ s}$ et $\mathbf{t_1 = 2T}$.

Exercice 2



Un solide ponctuel **(C)** de masse **m =0,2 kg** est attaché à l'extrémité d'un ressort **(R)** à spires non jointives, de raideur **K** et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe. L'ensemble est situé sur un banc à coussin d'air horizontal. On néglige tous les frottements.
On choisira un axe **x'x** parallèle au banc et on prendra comme, origine des élongations**.** Au repos le centre de gravité (G) du solide **(C)**se trouve en O.

1) On écarte le solide **(C)** de sa position de repos, dans le sens des élongations positives, d'une distance x_0 et on l'abandonne à lui-même à la date **t=0s**, sans vitesse initiale.
   a- Etablir l'équation différentielle des oscillations du solide, en représentant les forces qui lui sont appliquées.
   b. Quel est le phénomène physique observé ? Exprimer la fréquence propre $\mathbf{N_0}$ des oscillations en fonction de **K** et **m**.

2) A une date t ultérieure, l'élongation du solide **(C)** est x et sa vitesse est $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$. L'énergie potentielle de pesanteur est nulle sur le plan horizontale de référence passant par le point **G**.

a- Ecrire l'expression de l'énergie potentielle E_p du système déformable: **S={ (C)+ (R)}** en fonction de **x** et **K**.

b- Montrer que l'énergie mécanique totale E du système (S) est constante et donner son expression en fonction de **K** et x_0.

c- En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c de **(C)** en fonction de **x** ; **K** et x_0. Quelle est l'expression de sa valeur maximale, en fonction de **m**, w_0 et X_m (amplitude des oscillations)

3) Une étude expérimentale a permis de tracer la courbe : $E_c=f(x^2)$ (Voir figure sur la feuille annexe):

a- En exploitant cette courbe et en se servant de la question **(2/ c)**, déterminer l'amplitude X_m des oscillations, la pulsation propre ω_0 du mouvement de (C) et la constante de raideur **K** du ressort.

b- Représenter sur le même système d'axe et avec la même échelle les courbes de variation de E_m et E_p en fonction de x^2 .

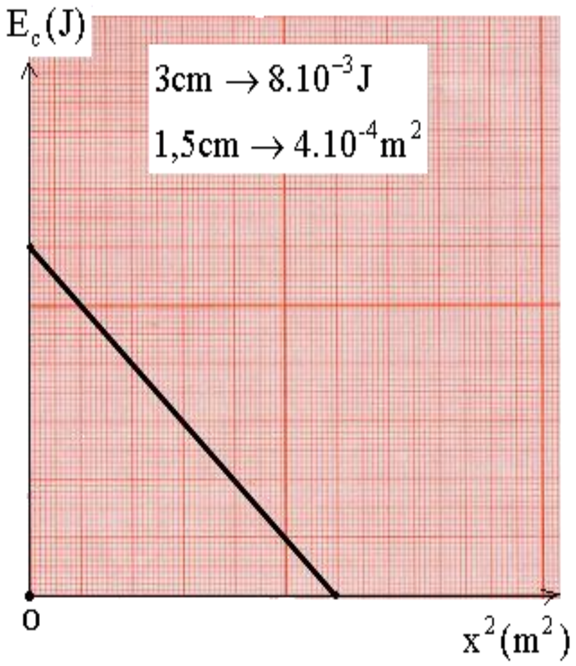
c- Tracer sur les mêmes courbes E_C (t) de l'annexe ci dessous : les courbes $E_p(t)$ et $E_m(t)$.

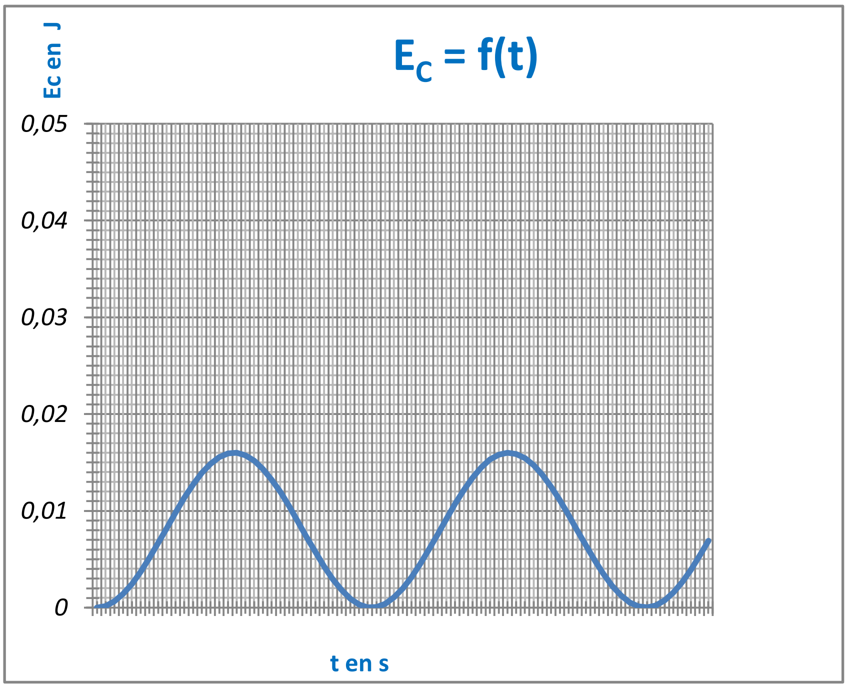
4) On exerce sur le solide une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$, **h** est une constante positive.

a- Etablir l'équation différentielle des oscillations relative à l'élongation **x.**

b- Représenter **x** en fonction du temps, selon l'ampleur de l'amortissement, les trois régimes d'oscillations observés.

c- Monter que l'énergie mécanique de l'oscillateur n'est plus constante.

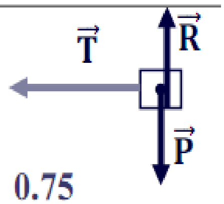




Correction Exercice 1

Exercice 2 : 6,5 points.

I / Les frottements sont supposés nuls.



1. a. figure explicative et équation différentielle en **x** du centre d'inertie **G** du solide.

La R.F.D: $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m.\vec{a}$ et donne sur l'axe ox : $-K.x=m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+K.x=0$ 0.75

b. solution de l'équation différentielle et expression de la période propre T_0 de l'oscillateur :

$x=X_m\sin(\omega_0 t+\varphi_x)$ avec $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ 0.75

c. $\Delta t=10s=20.T_0 \Rightarrow m=\frac{kT_0^2}{4\pi^2}=0.253kg.$ 1

$x=X_m\sin(\omega_0 t+\varphi_x)$ avec $X_m=\sqrt{\frac{V_0^2}{\omega_0^2}-x_0^2}=0,05m=5\ cm$

$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{160}=12,65rad.s^{-1}$

$\varphi_x=?$: $\begin{cases}\sin\varphi_x=0,5\\ \cos\varphi_x>0\end{cases} \Rightarrow \varphi_x=\frac{\pi}{6}rad$

$x=0.05.\sin(12,65.t+\frac{\pi}{6})$

2. a. Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.

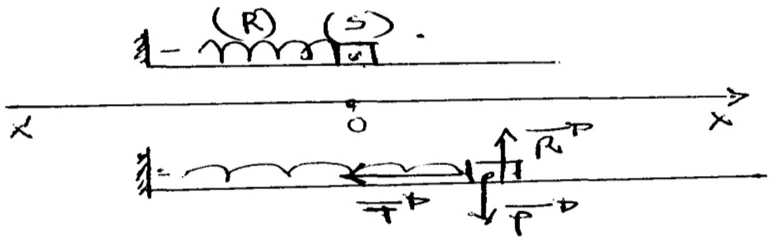
$E=\frac{1}{2}kX_m^2=\frac{1}{2}Kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2=0.05J$ 0.75

b. $v_{éq}=V_m=\sqrt{\frac{2E}{m}}=0.632\ m.s^{-1}=63,2\ cm.s^{-1}$. 0.5

II / Les frottements sont équivalents à la force $\vec{f}=-h.\vec{v}$, où **h** désigne le coefficient de frottement et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du centre d'inertie **G** du solide.

1. La **figure 1 :**
   a. Oscillations libres amorties : amplitude décroissante 0.5
   b. régime d'oscillation du pendule : régime pseudo périodique. 0.25
   c. la pseudopériode **T=0,5 s.** 0.5
2. L'équation différentielle régissant le mouvement du solide est : $\frac{d^2x}{dt^2}+3,2.\frac{dx}{dt}+160.x=0$
   a. Par identification on aura : $\omega_0^2=160 \Rightarrow \omega_0=12,65rad.s^{-1}$ et $\frac{h}{m}=3,2 \Rightarrow h=3,2.m=0,8kg.s^{-1}$ 0.5
   b. $\frac{dE}{dt}=-hv^2 \Rightarrow$ non conservation de l'énergie. 0.5
   c. ΔE entre les instants $t_0=0$ s et $t_1=2T$: $\Delta E=\left(\frac{1}{2}kX_m^2\right)_{t=2T}-\left(\frac{1}{2}kX_m^2\right)_{t=0}=-0,048J$ 0.5

Correction Exercice 2



1°)

(a) • système {S}

• inventaire des forces extérieures

$\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{R}$

• 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\,\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\,\vec{a}_G \Rightarrow$$

$$T = m\,a_G = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

(b) • phénomène d'oscillations mécaniques libres non amortie.

• $N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

2°)

(a) $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

(b) $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\,X_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) + \frac{1}{2}m\,V_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_v)$

$$= \frac{1}{2}k\,X_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) + \frac{1}{2}k\,X_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)$$

car $\begin{cases} V_m = \omega_0 X_m \\ \varphi_v = \varphi_x + \pi/2 \end{cases}$

donc $E = \frac{1}{2}k\,X_m^2\left[\cos^2 + \sin^2\right] = \frac{1}{2}k\,X_m^2 =$ Constante

$$= \frac{1}{2}k\,x_0^2$$

($|X_0| = X_m$ car le solide est abandonné à lui même sans vitesse initiale)

$$\boxed{E = \frac{1}{2}k\,x_0^2}$$

(c) $E_c = E - E_p = \frac{1}{2}k\,x_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$

$$E_{c\,max} = \frac{1}{2}m\,V_m^2 = \frac{1}{2}m\,\omega_0^2\,X_m^2$$

3)

a) $E_c = \frac{1}{2}k(X_m^2 - x^2)$

$E_c = 0 \Rightarrow x^2 = X_m^2 \Rightarrow X_m^2 = 12 . 10^{-4}\ m^2$.

$X_m = 3,46 . 10^{-2}\ m = 3,46\ cm$; $\boxed{X_m = 3,46cm}$ 0,5

$E_{c\,max} = 12 . 10^{-3}\ J = \frac{1}{2} m\omega_0^2 X_m^2 \Rightarrow$

$\frac{2E_{c\,max}}{m X_m^2} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{X_m}\sqrt{\frac{2E_{c\,max}}{m}}$

$= \frac{1}{3,46.10^{-2}} \cdot \sqrt{\frac{2 . 12 . 10^{-3}}{0,2}} = 28,9 . 0,346$

$= 10\ rad.s^{-1}$ 0,5

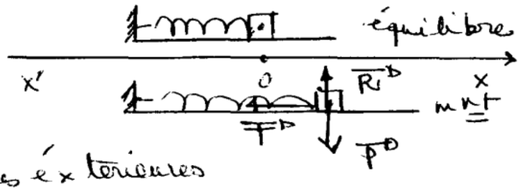
$\boxed{\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}}$ 0,5

$k = \frac{2E_m}{X_m^2} = 20\ N m^{-1}$; $\boxed{k = 20\ N.m^{-1}}$ 0,25 x 2

b/ voir annexe 0,25 x 2 | $0,25 \rightarrow E_p(x^2)$; $0,25 \rightarrow E_c(x^2)$

c/ " " | $0,25 \rightarrow E_p(t)$; $0,25 \rightarrow E_c(t)$

4) a)



- système {S}
- inventaire des forces extérieures $\vec P, \vec T, \vec R, \vec f$
- théorème du centre d'inertie

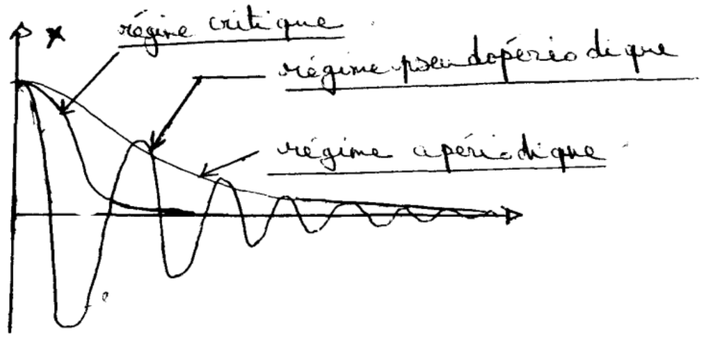
$\sum \vec F_{ex} = m\vec a_G \Rightarrow \vec P + \vec T + \vec R + \vec f = m\vec a_G$ 0,5

suivant (x'x) : $T + f = m a_G = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$

$-kx - h\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0}$$

b)



0,75