Lycée Secondaire El Ksour	*Série De Révision*	*Prof Bouzouraa Chaouki*
Année Scolaire 2014-2015	**MATHÉMATIQUES**	**Bac**

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1} = x + 1 - \dfrac{2\,e^x}{e^x + 1}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que les droites (d) et (d') d'équation $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes obliques à C.
4. Préciser les positions relatives des droites (d) et (d') par rapport à C.
5. Étudier la parité de la fonction f.
6. En déduire que C admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.
7. Déterminer les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
8. Dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
9. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
10. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C, il suffit d'étudier le signe de $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. En déduire la position de T par rapport à C.
11. Montrer que, pour tout réel a, le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ est supérieur à $\dfrac{1}{2}$.
12. Tracer C, (d), (d'), T.

Exercice 2

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

b. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxièm fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus. Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \int_0^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

a. Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\dfrac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant f(n) \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) \leqslant S_n.$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

c. En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(n) + f(n+1) + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

   a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

   b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$ si x 0 et $f(0) = 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a) Montrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que la fonction f est continue en 0.

4. Démontrer que, pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

5. Calculer la dérivée de la fonction f et déterminer la fonction g telle que $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

7. Soit a un réel non nul et les points M et M' , d'abscisses respectives a et $-a$, situés sur la courbe C représentative de la fonction f.

a) Établir que, pour tout réel x non nul, $f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').