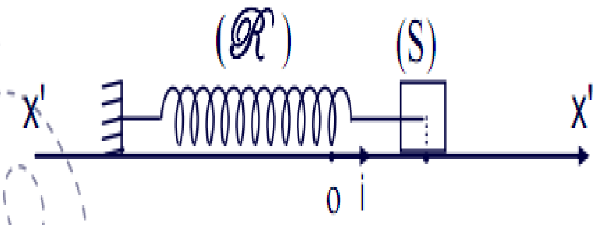
Un pendule élastique est constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur $k = 20\ N.m^{-1}$ et d'un solide (S), supposé ponctuel de masse m.

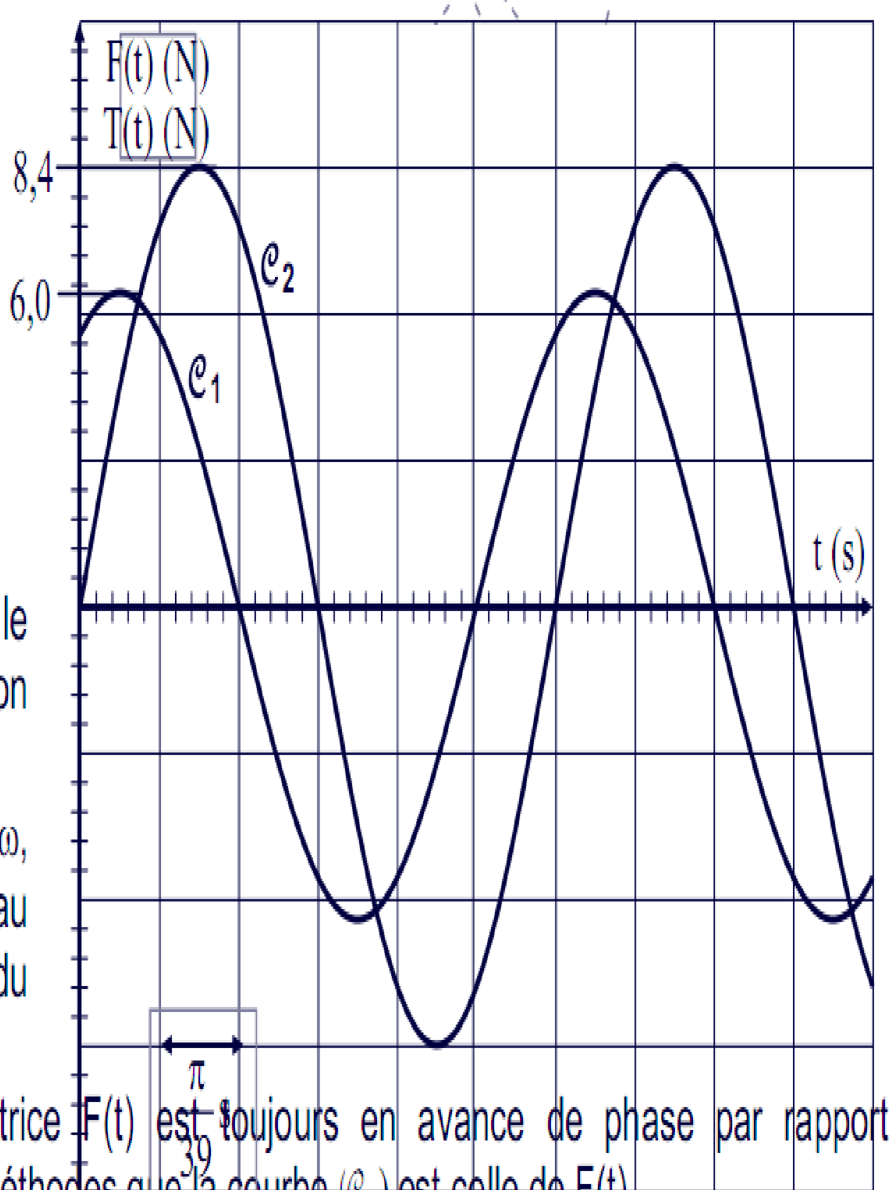
Le solide (S) peut se déplacer, sur un plan horizontal. Sa position est repérée par son abscisse x dans le repère $(O, \vec{i})$ avec O la position d'équilibre de (S).



On soumet le solide (S) à une for excitatrice

$\vec{F} = F\vec{i} = F_m.\sin(\omega t).\vec{i}$ et à une for de frottement visque

$\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse de (et h est une constante positive



1/ Établir l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation x(t).

2/ Pour une certaine valeur ω_1 de ω, on obtient les courbes d'évolution au cours du temps de la tension T du ressort et de la force excitatrice F :

a) Sachant que la force excitatrice F(t) est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation x(t), montrer par deux méthodes que la courbe ($\mathscr{C}_2$) est celle de F(t).

b) Déterminer les valeurs maximales de F(t) et de T(t).

c) Déterminer la période des oscillations du solide (s) ainsi que la pulsation ω_1.

d) Déterminer la valeur maximale X_{max} de l'élongation x.

e) Déterminer le déphasage $\varphi_T - \varphi_F$ de la tension T du ressort par rapport à la force excitatrice F

f) Déduire que l'expression de l'élongation x est : $x(t) = 0{,}3.\sin(13.t - \frac{2\pi}{3})$ (x en m et t en s)

g) Faire la construction de Fresnel pour $\omega = \omega_1$ échelle 1 cm → 1N

h) * Déduire à partir de cette construction que la masse de (S) est environ m = 0,2 kg et que le coefficient de frottement est environ $h = 1{,}87\ kg.s^{-1}$.

* Comparer ω_1 à la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur mécanique.

3/ On fait varier la pulsation ω à partir de la valeur ω_1, on constate que lorsque $\omega = \omega_2$ l'amplitude X_{max} de l'élongation x(t) devient maximale.

a) Quel est l'état de l'oscillateur lorsque $\omega = \omega_2$

b) Faut-il augmenter ou diminuer la pulsation de l'excitateur à partir de ω_1, pour atteindre ω_2 ? Justifier.

c) Faire une nouvelle construction de Fresnel sans soucis d'échelle pour $\omega = \omega_2$.

Déduire de la construction de Fresnel :

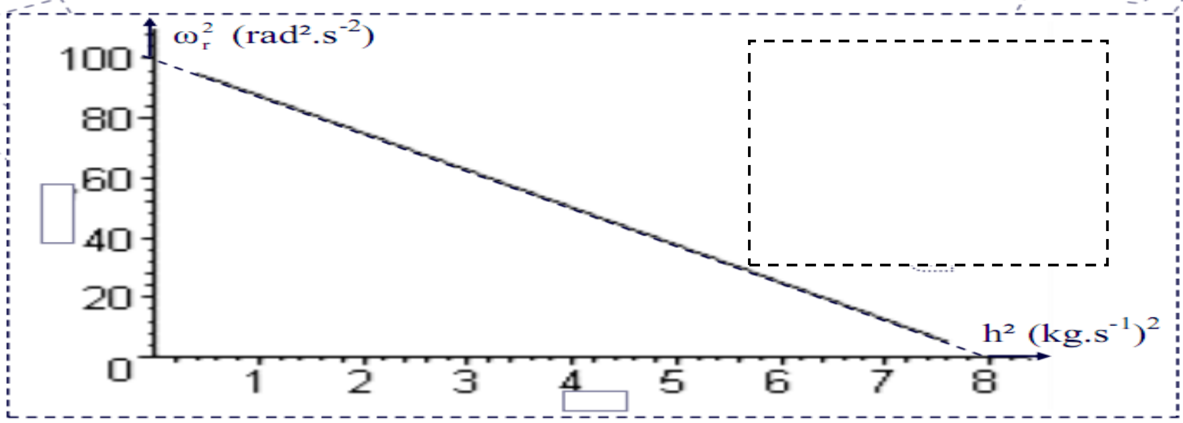
* Les expressions suivantes :

$$X_{max} = \frac{F_M}{\sqrt{h^2.\omega_2^2 + (k - m.\omega_2^2)^2}} \quad , \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \quad \text{et} \quad tg(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega_2}{k - m\omega_2^2}$$

* Le signe du déphasage $\varphi_V - \varphi_F$ lorsque $\omega = \omega_2$? Justifier la réponse.

c) Déterminer la valeur de ω_2.

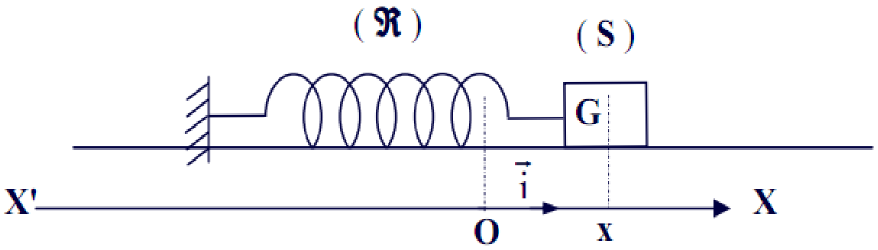
4/ On fait varier le coefficient de frottement h puis on détermine la pulsation ω_r pour laquelle l'amplitude X_{max} de l'élongation x(t) devient maximale les mesures permettent de tracer la courbe $\omega_r^2 = f(h^2)$ suivante :



a) Justifier l'allure de la courbe.
b) Retrouver à partir du graphique ω_0, m et une valeur approximative de ω_2.

Exercice n°1 *(10pts)*

*U*n pendule élastique est formé d'un solide **(S)** de masse **m** relié à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur **K = 16 Nm⁻¹**. L'autre extrémité du ressort est attachée à un support fixe, l'ensemble est placé sur un plan horizontal. On écarte le solide de sa position d'équilibre O, origine du repère $(O,\vec{i})$ puis on l'abandonne a lui-même sans vitesse initiale. La position du mobile a un instant t est donnée par son abscisse x. (voir figure)



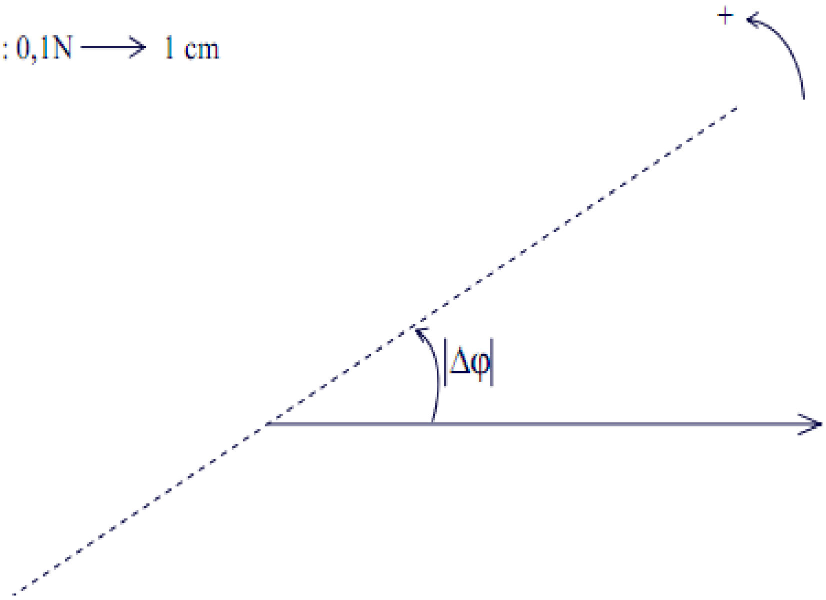
Au cours du mouvement le solide **(S)** est soumis a une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ ou $\vec{v}$ est la vitesse du solide **(S)** et **h** coefficient de frottements.

I - 1°) Préciser la nature des oscillations du pendule.
2°) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x du solide.
3°) Un dispositif de mesure approprié à permet d'obtenir les résultats du tableau suivant :

t (s)	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
x(cm)	4	0	-3,1	0	2,42	0	-1,86	0	1.47
v (m.s⁻¹)	0	-	0	-	0	-	0	-	0

a- Préciser à partir du tableau :
   * Le régime des oscillations.
   * La durée d'une oscillation et donner son nom.
b- Donner l'expression de l'énergie mécanique du système (solide + ressort).
c- Déterminer les valeurs E_1 et E_2 de l'énergie mécanique respectivement aux instants $t_1 = 0,5$s et $t_2 = 0,75$s.
d- Comparer E_1 et E_2 et interpréter.

Echelle : 0,1N ⟶ 1 cm



II – Pour entretenir les oscillations du pendule un dispositif convenable exerce sur le solide **(S)** une force $\vec{F}$ = **F(t)** $\vec{i}$ = $\mathbf{F_m}$ **sin (2πN$_e$.t + φ$_F$)** $\vec{i}$ de fréquence N_e réglable avec $\mathbf{F_m = 0,4\ N}$.

L'équation différentielle de l'oscillateur en x(t) s'écrit : $m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = F$

x(t) = X_m sin (2πN.t) est une solution de cette équation.

1°) a – Le dispositif qu'exerce la force $\vec{F}$ est appelé excitateur, préciser son rôle.

b – L'expérience montre que la fréquence N de l'élongation x est égale à celle N_e de la force excitatrice. Expliquer.

2°) Pour une valeur de la fréquence $\mathbf{N_e} = \frac{10}{\pi}$ Hz, l'amplitude de l'élongation est $\mathbf{X_m = 5\ cm}$ et le déphasage entre l'élongation **x(t)** et **F(t)** est $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{6}$ rad

a- Compléter, à l'échelle, sur la feuille jointe (figure 2), la construction de Fresnel correspondante à l'équation différentielle précédente.

b- Montrer que :

* La valeur du coefficient du frottement $\mathbf{h = 0,2\ Kg.s^{-1}}$

* La masse du solide $\mathbf{m \approx 22,7\ g}$.

c- Etablir les expressions de l'amplitude $\mathbf{X_m}$ et de **tg (φ$_F$)** en fonction de **h, m, K** et **w**.

3°) La valeur maximale de tension que peut supporter Le ressort est $\|\vec{T}\|$ **= 3,4 N**

a- La fréquence de résonance d'élongation a pour expression : $N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$. Calculer $\mathbf{N_r}$.

b- Déduire la valeur $\mathbf{X_{mr}}$ de l'amplitude de l'élongation à la résonance.

c- Que risque t-il de se produire à la résonance d'élongation. Justifier.

d- Proposer deux solutions permettant d'éviter ce risque.

4°) a- Par analogie mécanique électrique, donner pour un oscillateur électrique R, L, C, en régime sinusoïdal les expressions de :

- la charge maximale Q_m du condensateur ;
- la fréquence N_r à la résonance de charge.

b- Déduire le rapport $\frac{U_m}{I_m}$ en fonction de **R, L,C** et **N** où **Um** est la valeur maximale de la tension excitatrice et **Im** est la valeur maximale de l'intensité du courant .Donner son nom.

c- Donner, par analogie, l'expression de l'impédance mécanique, déterminer sa valeur pour $N = \frac{10}{\pi}$ Hz.

5°) La puissance mécanique moyenne est : $\mathbf{P_m = \frac{1}{2} F_m V_m \cos(\varphi_F - \varphi_v)}$.

a- Monter que la puissance mécanique moyenne s'écrit $P_m = \frac{h}{2}.V_m^2$

b- Calculer $\mathbf{P_m}$ si : $\mathbf{N} = \frac{10}{\pi}$ Hz.

c- Montrer qu'il y a résonance de puissance pour $\mathbf{N = N_0}$. avec $\mathbf{N_0}$ la fréquence propre des oscillations.

d- Tracer l'allure de la courbe : $\mathbf{P = g(N)}$.

Exercice n°1 (8,5 points)

Une pendule élastique horizontale est constituée :

* d'un ressort (R) de masse négligeable et à spires non jointives et de constante de raideur K.

* d'un corps (C), de masse m = 400 g qui peut glisser sans frottement sur une tige rigide (T) horizontale sur laquelle est enfilé le ressort (R) voir figure 1.

La position du centre d'inertie **G** du corps (C) est définie par son abscisse **x** dans le repère (O, $\vec{i}$). L'origine **O** correspond à la position de **G** lorsque le corps (C) est en équilibre.

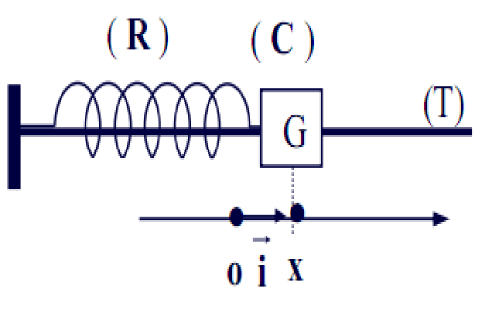


Figure 1

I – Les frottements sont supposées négligeables, on écarte le corps (C) de sa position d'équilibre d'une distance d dans le sens positif des élongations et on l'abandonne à lui même à l'origine du temps sans vitesse initiale.

L'enregistrement mécanique des élongations x en fonction du temps donne la courbe de la figure 2.

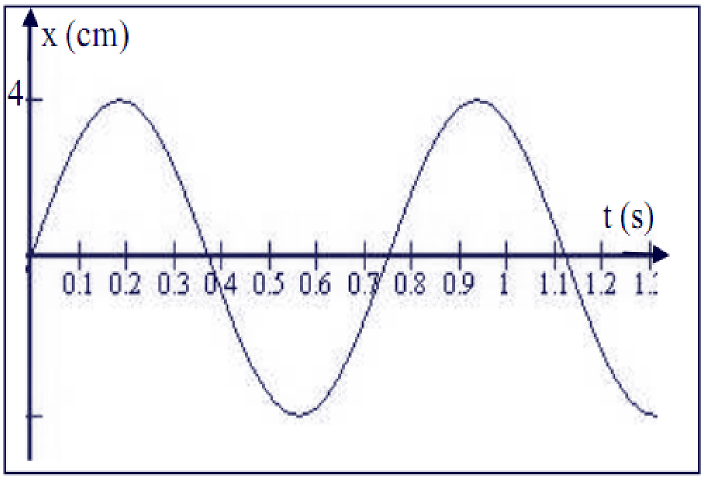


Figure 2

1°) a- Préciser la nature des oscillations.

b- Donner, alors, l'équation différentielle des oscillations en x.

2°) Déterminer graphiquement :

a- L'amplitude X_m des oscillations.

b- La période T_0 des oscillations. Déduire la valeur de la constante de raideur K. **On prendra** $\pi^2 \approx 10$.

3°) a- Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système S = {(C), (R)} à un instant de date t, en fonction de K, m, x et v, ou v est la vitesse du corps à l'instant t.

b- Justifier que le système S est conservatif.

c- Déduire que l'expression de l'énergie cinétique peut s'écrire $E_C = A - \frac{1}{2} K x^2$, ou A est une constante qu'on précisera sa signification.

d- Une étude expérimentale à permis de tracer la courbe $E_C = f(x^2)$ de la figure 3.

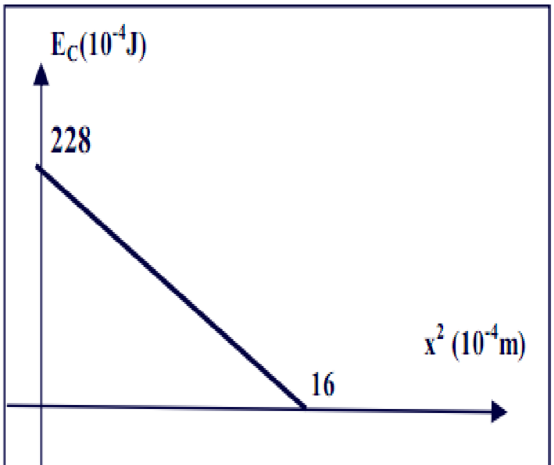


Figure 3

A partir de la courbe

* retrouver la valeur de la constante de raideur K.
* déterminer la valeur de la constante A.

II – Dans la suite le corps (C) est soumis à des forces de frottements de type visqueux (lame + eau) équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, avec h est une constante positive.

Un dispositif, non représenté, exerce sur (C) une force excitateur $\vec{F} = F(t)\vec{i}$, avec $F(t) = F_m \sin(2\pi N t + \pi)$.

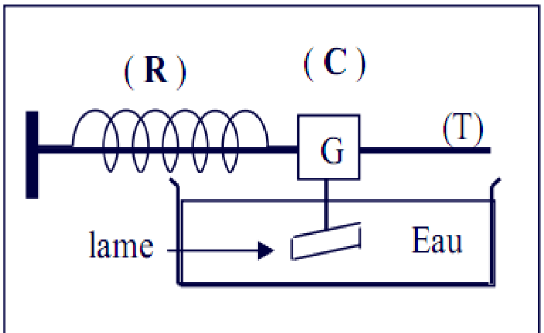


Figure 4

1°) Indiquer, en expliquant, le rôle de l'excitateur.

2°) Montrer que l'équation différentielle des oscillations forcées faisant intervenir x peut s'écrire :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h\frac{dx(t)}{dt} + K.x(t) = F(t)$$

3°) Pour une valeur de fréquence de l'excitateur N = 1 Hz, on donne sur la feuille jointe (figure 6) la construction de Fresnel incomplète relative à l'équation différentielle précédente.

a- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ représente la fonction K.x(t). Que représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Justifier.

b- Sachant que F_m = 2 N compléter à l'échelle, sur la feuille jointe à remettre avec la copie, la construction de Fresnel.

c- Déterminer graphiquement X_m et déduire la constante h . On donne K = 28,5 N.m^{-1}

4°) Pour deux valeurs h_1 et h_2 de h (avec $h_2 < h_1$) et on a tracé expérimentalement dans chaque cas les courbes $X_m = f(N)$ de réponse du résonateur voir figure 5

a- Quel est l'état de l'oscillateur pour $N = N_a$ et $N = N_b$.

b- Attribuer en justifiant les valeurs h_1 et h_2 aux courbes (a) et (b).

c- Sachant que N_r peut s'écrire : $N_r^2 = N_0^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2 m^2}$, avec N_0 est la fréquence propre.

- Que représente N_r.
- Tracer l'allure de la courbe $X_m = f(N)$ pour des frottements négligeables ($h \to 0$)

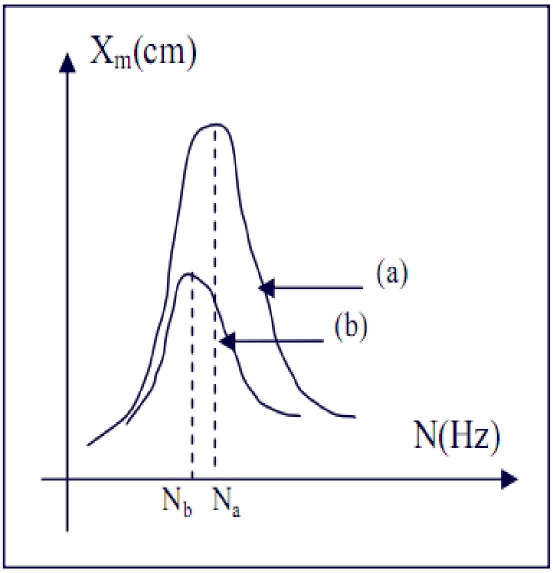


Figure 5

5°) a – On rappelle que l'expression de la puissance moyenne consommée par un oscillateur électrique analogue est : $P_m = R_T.I^2$. Montrer par une analogie électrique-mécanique que l'expression de la puissance mécanique moyenne dissipée par l'oscillateur mécanique précédent peut s'écrire

$$P_m = \frac{hF_m^2}{2[h^2 + (m\omega - \frac{K}{\omega})^2]} \quad \text{avec : } \omega = 2\pi N .$$

b- Déterminer la pulsation à la résonance de puissance.

c- Calculer la valeur maximale de cette puissance.

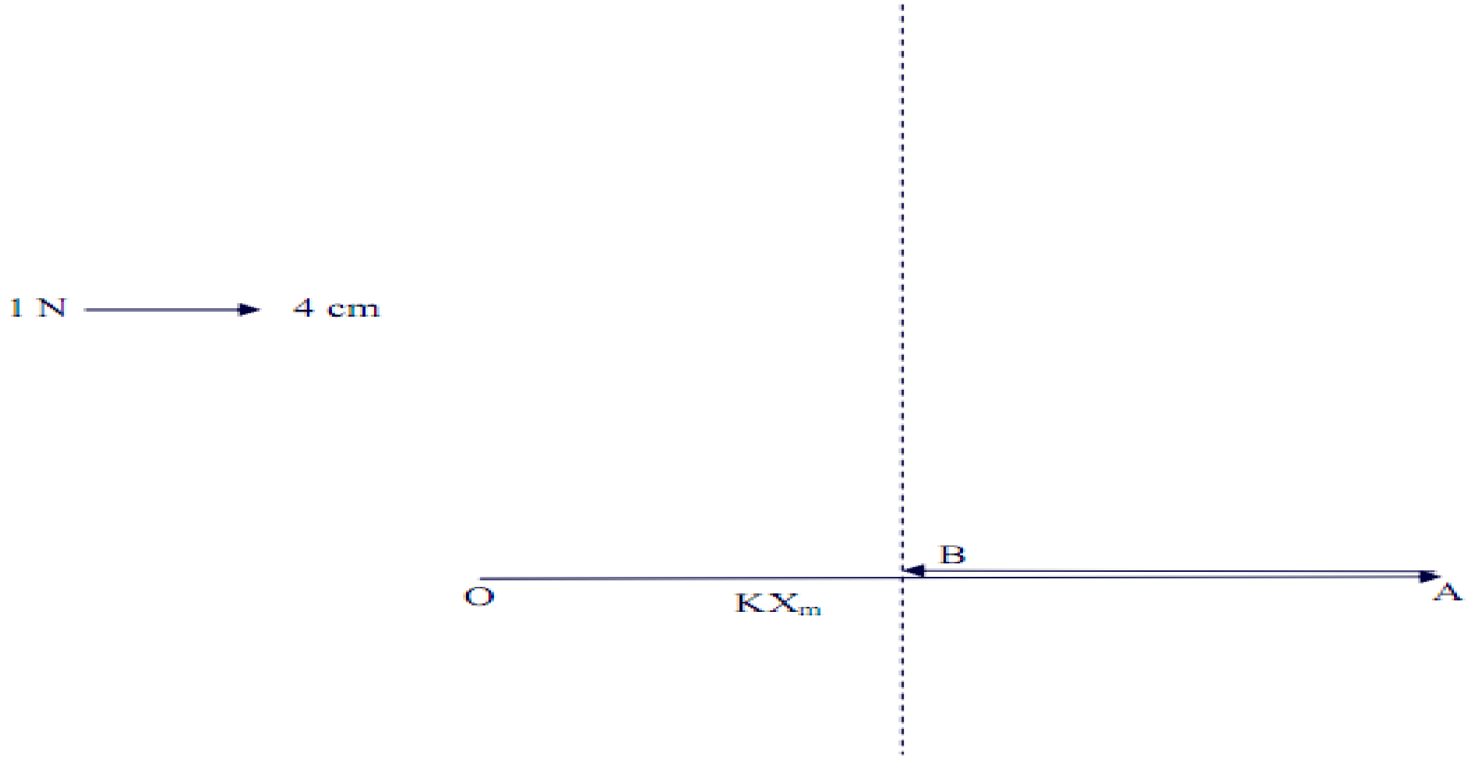


Figure 6

Exercice n°1

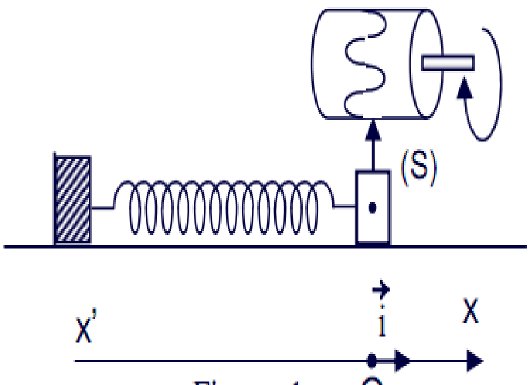


Figure 1

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de constante de raideur K, lié à un solide (S) de masse m qui peut se déplacer sur un plan horizontal. A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O d'un repère $(O, \vec{i})$. La position du solide est repérée par son abscisse x dans ce repère.

Un stylet fixé sur le solide S permet d'enregistrer l'évolution de l'abscisse de son centre d'inertie en fonction du temps sur une feuille de papier enroulé sur un cylindre tournant, à vitesse constante, à l'aide d'un moteur non représenté. (Fig 1)

Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ ou h est une constante qui peut être positive ou nulle et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide. Pour mettre l'oscillateur en oscillations forcées, un dispositif approprié non représenté permet d'exercer sur le solide (S) une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(2\pi N_e t)\vec{i}$ de fréquence Ne réglable.

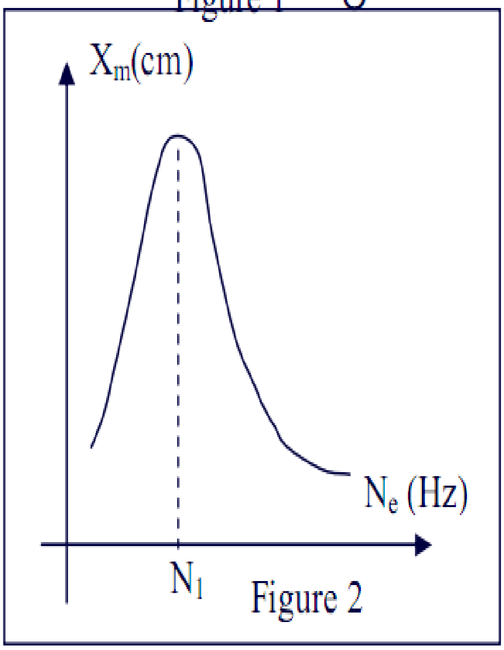


Figure 2

I- Etude expérimentale

1°) Expérience 1 :

On fait varier la fréquence de la force excitatrice et on mesure à chaque fois l'amplitude des oscillations du solide. Les résultats des mesures permettent de tracer le courbe $X_m = f(N_e)$. (Fig 2)

a- Préciser l'état du système pour $N_e = N_1$.

b- Comparer, en justifiant et sans calcul, N_1 à N_0.

2°) Expérience 2 :

Le dispositif d'enregistrement des oscillations est constitué d'un cylindre tournant à une fréquence $N' = 35/4\pi$ Hz. Sur la feuille de papier, on observe une sinusoïde comportant n = 2 oscillations pour un tour complet. (Fig 3)

Déterminer la période des oscillations.

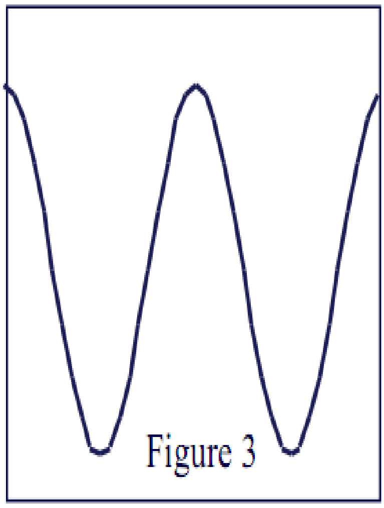


Figure 3

3°) Expérience 3 :

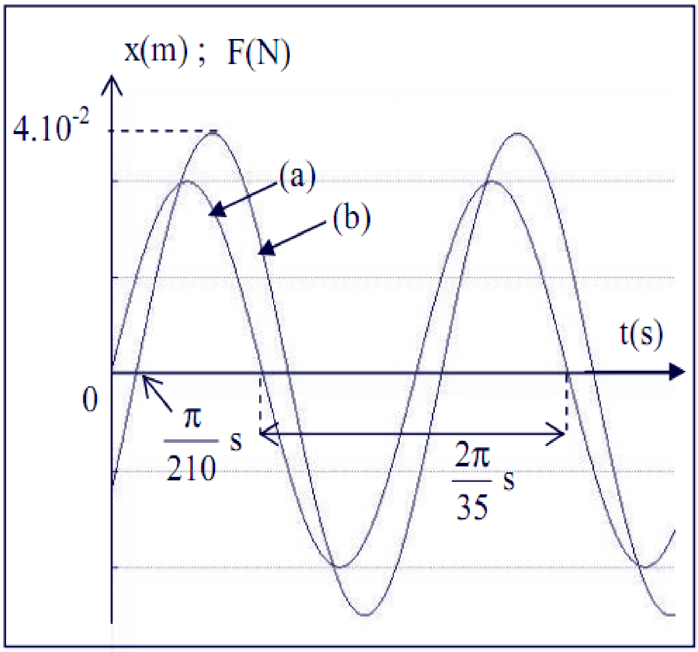
Une étude expérimentale a permis de tracer les courbes représentant les variations, en fonction du temps, des valeurs algébriques de la force excitatrice **F** et l'élongation **x.**

a- Justifier que la courbe (b) correspond à x(t).

b- Déduire, en justifiant, la période des oscillations T et la fréquence N.

c- Déterminer le déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_F - \varphi_x)$.

d- Déterminer l'expression de x(t).



II- Etude théorique

1°) Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G du solide S, en x(t), est :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = F$$

2°) Pour la fréquence $N_1 = 35/2\pi$ de Ne on donne sur l'annexe une construction de Fresnel incomplète où figure le vecteur $\overrightarrow{OA}$ qui représente la fonction Kx et le vecteur $\overrightarrow{OC}$ qui représente la force F.

a- Compléter la construction de Fresnel en représentant dans l'ordre le vecteur relatif à $m\frac{d^2x}{dt^2}$ puis celui relatif à $h\dfrac{dx}{dt}$.

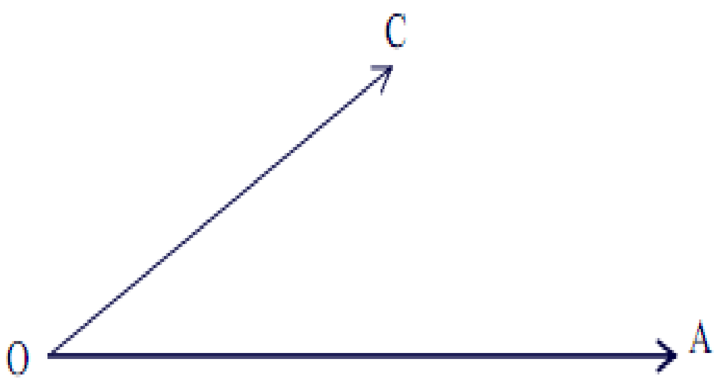
b- Déduire à partir de cette construction :

- la valeur F_m de F ;
- la valeur du coefficient du frottement **h ;**
- La valeur de la masse m.

3°) Pour une valeur N_2 de Ne le déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_F - \varphi_x) = \dfrac{\pi}{2}$ rad

- Par analogie électrique mécanique, monter que l'oscillateur est en résonance de vitesse.
- Déduire la valeur de N_2.

Echelle 2 cm ⟶ 1 N



EXERCICE N°1 (Bac)

Un oscillateur mécanique constitué d'un ressort de raideur k, d'un solide (S) de masse M. Le solide est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive. Les oscillations de (S) sont entretenues à l'aide d'une force excitatrice $\vec{F} = F(t).\vec{i} = Fm \sin(\omega t)\vec{i}$.

L'élongation x de G vérifie l équation différentielle

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = F_m \sin(\omega t)$$

dont la solution est $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_X)$.

Les fonctions x(t) et F(t) sont représentées par les diagrammes de la figure -2.

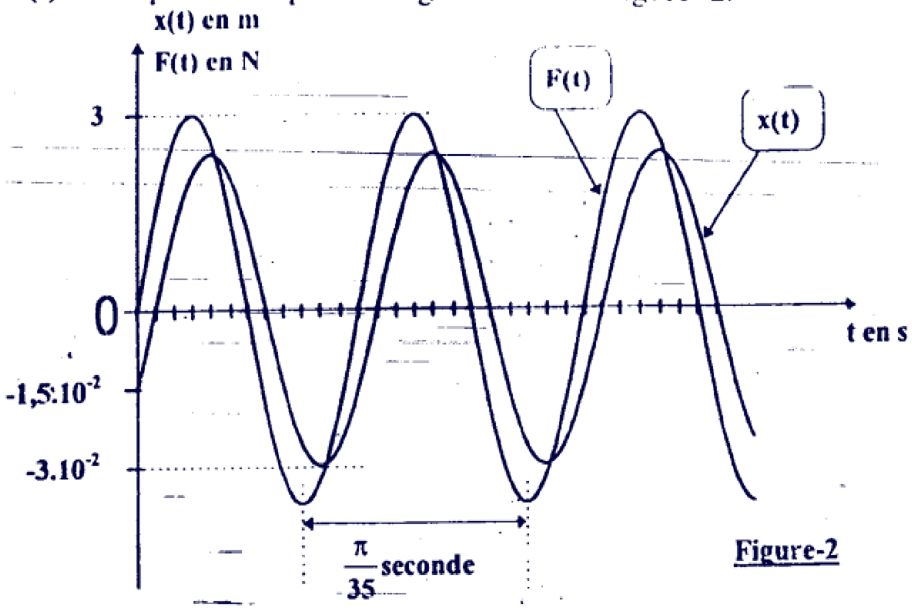


Figure-2

1) Au cours de ces oscillations forcées, il y a échange d'énergie entre le résonateur $\{(R) + (S)\}$ et

2) A partir des diagrammes de la figure -2 :

a - déterminer les expressions de F(t) et x(t). Préciser, en le justifiant, s'il existe des valeurs de la pulsation ω de la force excitatrice pour lesquelles le déphasage de x(t) par rapport à F(t) change de signe.

b - Faire la construction de Fresnel, et en déduire les valeurs de h et de K.

3) a - Donner l'expression de l'amplitude X_m en fonction de F_m , h , ω , K et M. En déduire l'expression de l'amplitude V_m de la vitesse instantanée en fonction des mêmes données.

b - Déterminer le rapport $\frac{F_m}{V_m}$ en fonction de h , ω , K et M. Déduire, à l'aide de l'analogie mécanique-électrique, l'expression correspondant à ce rapport en électricité et en donner la signification physique.

Exercice 8 :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort de raideur k = 20 Nm^{-1} et d'un solide de centre d'inertie G et de masse m = 0,2kg placé sur un plan rugueux. On écarte le solide de sa position d'équilibre de Xm puis on le lâche sans vitesse initiale. Des oscillations pseudo périodique prennent naissance à cause des forces de frottement traduit par la force F = -hV avec h = 1 Nms^{-1}

1. Calculer la pseudo période T sachant qu'on peut la confondre avec la période propre T_0 de l'oscillateur utilisé.
2. Donner l'allure de la courbe représentative X = f (t) pour le régime ci-dessus (le coefficient de frottement h faible).
3. Pour entretenir les oscillations précédentes, on excite le système de façon périodique par une force F = Fm sin (2πNt) avec Fm = 1,2N. ainsi le solide oscille sinusoïdalement suivant l'équation X = Xm sin (2πNt – π/2).

a- Etablir l'équation différentielle du mouvement de G.

b- Faire la construction de Fresnel et en déduit :

*La valeur de la fréquence de l'oscillateur.

*La valeur de l'amplitude Xm.

c- Ecrire l'expression de la vitesse instantanée du solide

d- Ecrire l'expression de la puissance moyenne consommée par l'oscillateur en fonction de h et Vm et la calculer.

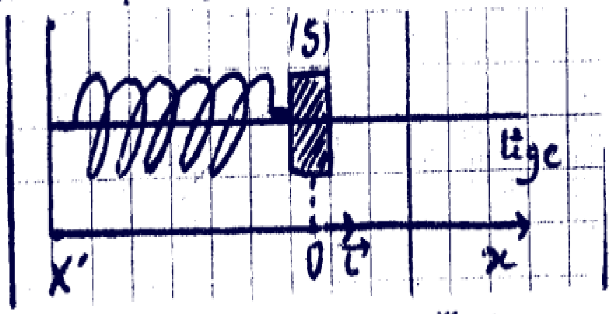
4. Calculer la fréquence Nr de la force F(t) pour laquelle Xm est maximale .

5. Représenter l'allure de la courbe des variations de Xm en fonction de N , indiquer les coordonnées des points particuliers .

6. Montrer qu'il existe une valeur de l'amortissement h notée h_0 au dessus de laquelle le phénomène de résonance est non possible. Calculer h_0 .

EXERCICE : 3 :

Un pendule élastique horizontale est constitué d'un solide (S) de masse M, soudé à l'extrémité d'un ressort de raideur K, enfilé sur une tige parfaitement lisse sur laquelle peut coulisser le solide.



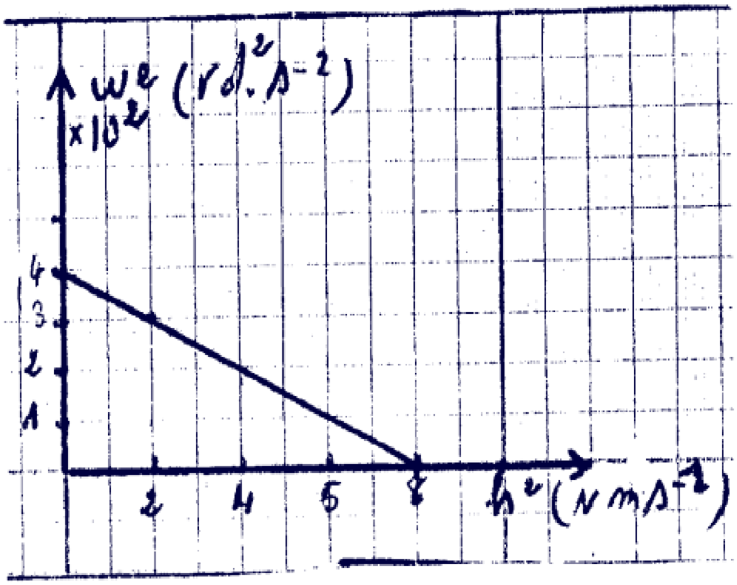
Pour entretenir le mouvement du solide ; un excitateur exerce sur (S) une force $\vec{F} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)\,\vec{i}$.

Le solide est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -h\,\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ étant le vecteur vitesse instantanée du solide .

1) a- Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S) ou x (t) est la grandeur oscillante.

b- L'oscillateur étant en mouvement sinusoïdal d'équation horaire $x(t) = x_m \sin(\omega t + \pi/6)$,par la méthode de Fresnel donner l'expression de l'amplitude x_m en fonction F_m, h,ω, K et M sachant que $\varphi_F < \pi/2$.

c- Calculer φ_F sachant que $F_m = 1{,}5$ N ; $\omega = 37{,}5\,rd.s^{-1}$; $x_m = 5.10^{-2}$ m et $h = 0{,}4\ kg.s^{-1}$.



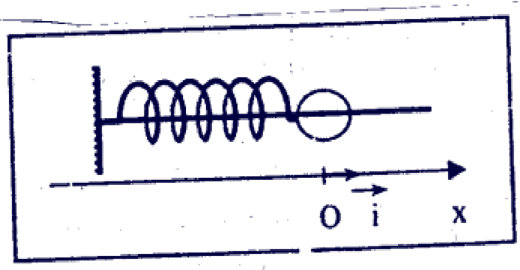
2) Calculer la puissance moyenne consommée par l'oscillateur.

3) L'amplitude x_m est maximale pour une valeur ω_r de la pulsation ω. Etablir l'expression de ω_r en fonction de K,M et h.

4) pour différentes valeurs de h on a représenté la courbe $W_r^2 = f(h^2)$, déduire les valeurs de M et K.

5) On fait varier la raideur K du ressort. Déterminer la valeur K_0 de K pour laquelle F et V deviennent en phase calculer V_m .

EXERCICE : 4

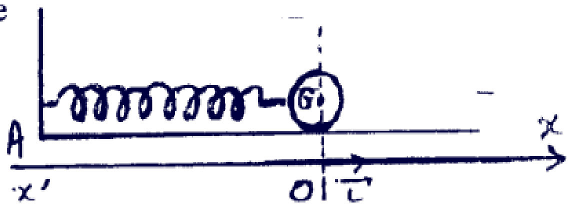


Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K auquel est attaché un solide (S) de masse m (*voir figure*). L'oscillateur est excité par une force $\vec{F} = (F_m \sin \omega t).\vec{i}$ et est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -h.\vec{v}$ par un dispositif approprié non schématisé.

On donne : $K = 20\ N.m^{-1}$; $m = 0,2\ kg$; $F_m = 0,8\ N$ et $h = 0,35\ N.m^{-1}.s$.

1. Donner l'équation différentielle de l'oscillateur.
2. Pour une pulsation $\omega = 8\ rad.s^{-1}$; déduire de la construction de Fresnel l'expression de la valeur maximale de la vitesse. Calculer V_m.
3. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps.
4) Donner l'expression de la puissance mécanique moyenne, et calculer l'énergie absorbée par l'oscillateur pendant une période d'oscillation.
5) Trouver l'expression de l'impédance mécanique de l'oscillateur ; puis déduire l'impédance de l'analogue électrique.

EXERCICE : 5



On considère un ressort R de constante de raideur K ; l'une de ses extrémités A est fixée à un support et l'autre à une sphère d'acier de masse m = 0,1kg. Le solide effectue un mouvement de translation horizontal. L'origine du repère sera confondue avec le centre d'inertie G de la sphère à l'équilibre ; son sens sera de A vers G. Les frottements sont équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $h = 2\ N.m^{-1}.s$. Un électro-aimant parcouru par un courant alternatif exerce sur la sphère une force

$\vec{F} = F.\vec{i}$ avec $F = F_m \sin(\omega t)$;

varie selon $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2) Les variations en fonction du temps de la force excitatrice $\vec{F}$ et de la force de frottement $\vec{f}$ sont représentés sur la figure 3.

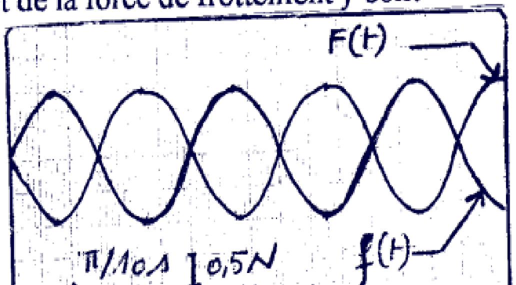


figure 3

a- Déterminer la valeur de la pulsation ω.
b- Montrer que l'oscillateur est en résonance de vitesse.
c- En exploitant le digramme de Fresnel déterminer :
- La vitesse maximale
- la constante de raideur K du ressort.

d- En déduire l'amplitude du mouvement.
e- Calculer la puissance moyenne absorbée par l'oscillateur.

3) On fait augmenter la pulsation ω de l'excitateur à une autre valeur ω_1.

a- Faire la représentation de Fresnel.
b- Déterminer l'expression de la phase φ de la vitesse en fonction ω_1.
c- Etablir l'expression de V_{max}.
d- Montrer qu'à la résonance de vitesse ω ne dépend pas de h.

Exercice n° 5 :

Un pendule élastique, constitué d'un ressort de constante de raideur $k = 400 N.m^{-1}$ et d'un solide (C) de masse $M = 20$ g, mis en oscillations forcées sinusoïdales par un moteur dont l'arbre tourne à fréquence réglable N

Les forces de frottement visqueux agissant sur le solide (C) sont équivalentes à $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive ;

La force excitatrice exercée par le moteur est $\vec{F}(t) = F_m \sin(\omega t)\vec{i}$

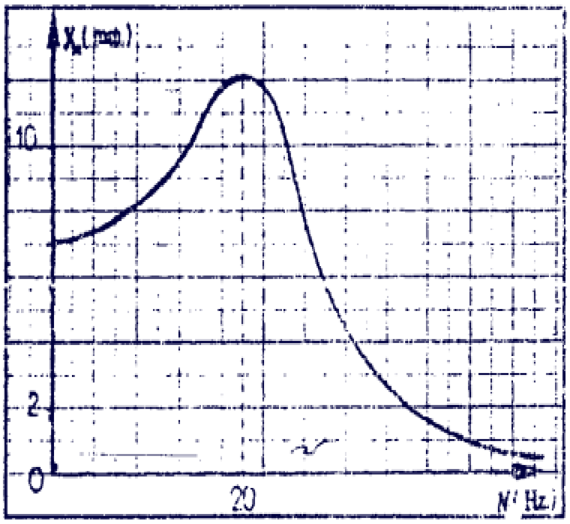
Le solide prend alors un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal d'élongation $x(t)$ tel la fig 2 donne les variations de l'amplitude X_m des oscillations en fonction de la fréquence N de la force excitatrice. dans le cas $\omega > \omega_0$.

1°) Montrer que : $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{\omega^2 h^2 + (\omega^2 M - K)^2}}$

2°) Déterminer à partir de la représentation graphique de $X_m = f(N)$:

a) La fréquence N_r de résonance d'élongation de l'oscillateur.

b) L'amplitude des oscillations de (C) pour : $N = N_r$.



3°) Montrer que la fréquence de résonance N_r est liée à la fréquence propre de l'oscillateur par la relation : $N_r^2 = N_0^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2 M^2}$

4°) Déduire de tout ce qui précède ;

a) La valeur de F_m .

b) La valeur de h.

c) L'expression numérique de $x(t)$ à la résonance d'élongation.

5°) Montrer qu'il existe une valeur du coefficient de frottement noté h_0 au delà de laquelle il n'existe plus de résonance d'élongation. Déterminer h_0 .

Correction

EXERCICE 1

1/R.F.D : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$

On projette cette égalité sur l'axe (ox) : T+ f +F = m.a

$-Kx - hv + F = m.a \Rightarrow Kx + hv + m.a = F$ or $v = \frac{dx}{dt}$ et $a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$

L'équation différentielle du mouvement est :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin\omega t$$

2/ a)

1ère méthode ; La force excitatrice F(t) est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation x(t) et T est en opposition de phase avec x car T = -K.x $\Rightarrow \varphi_T = \varphi_x + \pi$ donc T est toujours en avance de phase par rapport F(t) $\Rightarrow$ la courbe $(\mathscr{C}_2)$ est celle de F(t).

2ème méthode

$\vec{F} = F_m.\sin(\omega t).\vec{i} \Rightarrow \varphi_F = 0$ donc la courbe de F passe par l'origine $\Rightarrow$ la courbe $(\mathscr{C}_2)$ est celle de F(t).

b) Les valeurs maximales de F(t) et de T(t). sont F_{max} = 8,4 N et T_{max} = 6 N

c) La période des oscillations du solide (s) est $T_1 = 6.\frac{\pi}{39}s = \frac{6\pi}{39}s$ et la pulsation $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 13\ rad.s^{-1}$

d) On a $T_{max} = K\,X_{max} \Rightarrow X_{max} = \frac{T_{max}}{K} = \frac{6}{20} = 0,3\ m$

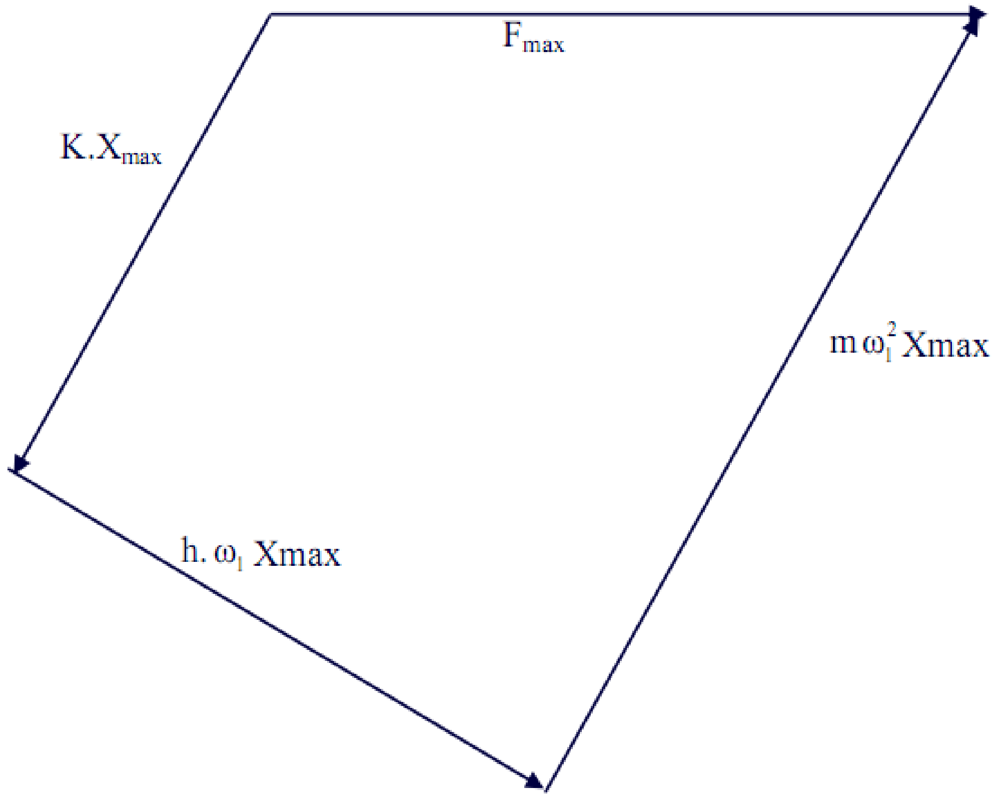
e) On a T est en avance de phase sur F $\Rightarrow \varphi_T - \varphi_F = \omega_1.\Delta t = \frac{2\pi}{T_1}.\Delta t = \frac{2\pi}{T_1}\frac{T_1}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad

f) On a $x(t) = X_{max}\sin(\omega_1.t + \varphi_x)$ avec $X_{max} = 0,3$ m ; $\omega_1 = 13$ rad.s^{-1} et $\varphi_x = \varphi_T - \pi$ avec $\varphi_T = \frac{\pi}{3}$ rad

car $\varphi_F = 0 \Rightarrow \varphi_x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$ rad donc $x(t) = 0,3.\sin(13.t - \frac{2\pi}{3})$ (x en m et t en s)

g) *La construction de Fresnel pour $\omega = \omega_1$ échelle 1 cm $\rightarrow$ 1N

$T_{max} = K X_{max} = 6N \rightarrow 6$ cm et $F_{max} = 8,4N \rightarrow 8,4$ cm



h) $m\omega_1^2 Xmax \rightarrow$ 10,2 cm $\Rightarrow m\omega_1^2 Xmax = 10,2N \Rightarrow m = \dfrac{m.\omega_1^2.X_{max}}{\omega_1^2.X_{max}} = \dfrac{10,2}{13^2.0,3} = 0,2$ kg

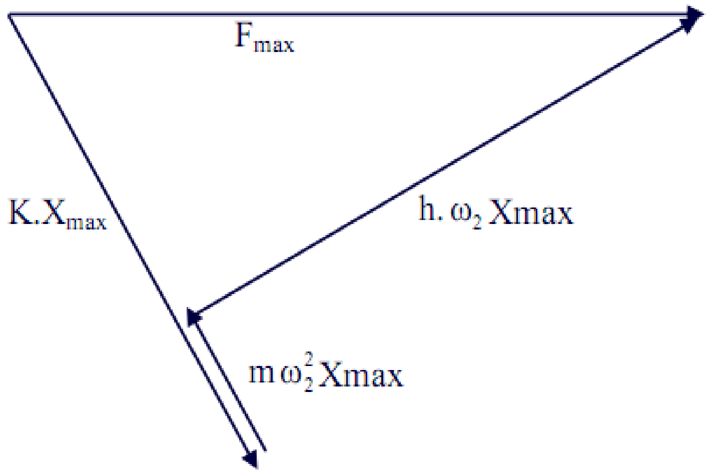
$h\omega_1 Xmax \rightarrow$ 7,3 cm $\Rightarrow h\omega_1 Xmax = 10,2N \Rightarrow h = \dfrac{h.\omega_1.X_{max}}{\omega_1.X_{max}} = \dfrac{7,3}{13.0,3} = 1,87$ kg.s^{-1}.

* On a : $m\omega_1^2 Xmax > K.X_{max} \Rightarrow \omega_1^2 > \dfrac{K}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_1 > \omega_0$

3) a) Lorsque $\omega = \omega_2$, l'oscillateur est en état de résonance d'élongation

b) Il faut diminuer la pulsation de l'excitateur à partir de ω_1, pour atteindre ω_2 car à résonance d'élongation $\omega_r = \omega_2 < \omega_0$ et $\omega_1 > \omega_0$

c)



*Théorème de Pythagore

$$F^2_{max} = (K.X_{max} - m\,\omega_2^2 Xmax)^2 + (h\,\omega_2 Xmax)^2 = X^2_{max}\ [(h\,\omega_2)^2 + (K - m\,\omega_2^2)^2] \Rightarrow X^2_{max} = \frac{F^2_{max}}{(h\omega_2)^2 + (K - m\omega_2^2)^2}$$

$$\Rightarrow X_{max} = \frac{F_{max}}{\sqrt{(h\omega_2)^2 + (K - m\omega_2^2)^2}}$$

$X_{max}(\omega) = \dfrac{F_{max}}{\sqrt{(h\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2}}$ à la résonance d'élongation X_{max} est maximale $\Rightarrow$

$\dfrac{d\left[(h\omega)^2 + (K - m\omega^2)^2\right]}{d\omega} = 0$ pour $\omega = \omega_2$

$$\Rightarrow 2h^2.\omega_2 - 4m.\omega_2\ (K - m\,\omega_2^2) = 0 \Rightarrow h^2 - 2m\ (K - m\,\omega_2^2) = 0 \Rightarrow h^2 = 2m\ (K - m\,\omega_2^2) \Rightarrow K - m\,\omega_2^2 = \frac{h^2}{2m}$$

$$\Rightarrow m\,\omega_2^2 = K - \frac{h^2}{2m} \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2m^2} = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$tg(\varphi F - \varphi x) = \frac{h\omega_2.X_{max}}{(k - m\omega_2^2).X_{max}} = \frac{h\omega_2}{k - m\omega_2^2}$$

On a $-\frac{\pi}{2} < \varphi_x - \varphi_F < 0$ et $\varphi_x = \varphi_v - \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi_v - \varphi_F - \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow 0 < \varphi_v - \varphi_F$

c) $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{K}{m} - \dfrac{h^2}{2m^2}} = \sqrt{\dfrac{20}{0,2} - \dfrac{1,87^2}{2.0,2^2}} = 7,5$ rad.s^{-1}

4/ a) La courbe.de ω_r^2 = f(h²) est une droite affine d'équation ω_r^2 = A.h² +B

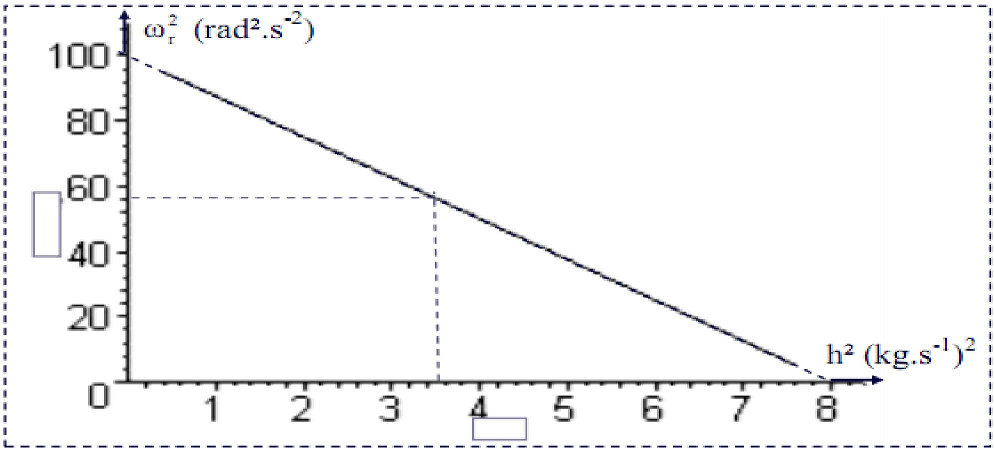
D'autre part $\omega_2^2 = \omega_0^2 - \dfrac{h^2}{2m^2} = -\dfrac{1}{2m^2}h^2 + \omega_0^2 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2m^2}$ et $B = \omega_0^2$

b)* L'intersection du prolongement de ma courbe de ω_r^2 = f(h²) nous donne ω_0^2 = 100 rad².s^{-2} $\Rightarrow \omega_0$ = 10 rad.s^{-1}.

*La pente de la droite $A = -\dfrac{1}{2m^2} = \dfrac{\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2}{h_2^2 - h_1^2} = \dfrac{100-0}{0-8}$ = -12,5 kg^{-2}.

$m^2 = -\dfrac{1}{2.A} \Rightarrow m = \sqrt{-\dfrac{1}{2.A}} = \sqrt{\dfrac{1}{25}}$ = 0,2 kg

*Pour h = 1,87 kg.s^{-1}. On a h²= 3,5 kg².s^{-2} . $\Rightarrow \omega_2^2$=56 rad².s^{-2} $\Rightarrow \omega_2$=7,48 rad.s^{-1}



Exercice N°1 (3,5 points)

I –

1°) Précisons la nature des oscillations du pendule.

Le pendule est abandonnée à lui-même et le solide est soumis une de frottement donc les oscillations sont libre amortis. **(0,5 pt)**

2°) Etablissons l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x du solide.

On applique la R.F.D au système $\{C\}$

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

Bilan des forces

$\vec{T}$, $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{f}$: forces extérieures.

$\vec{f}$ est la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$

$\vec{f} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ après projection $T + f = ma \Leftrightarrow -Kx - hv = ma$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0$ Equation différentielle d'un oscillateur mécanique libre amorti.

(0,5 pt)

3°) a- D'après le tableau :

- L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps alors le régime est pseudopériodique.

(0,5 pt)

- La pseudo période T = 0,5 s

(0,5 pt)

b- Donnons l'expression de l'énergie mécanique du système (solide + ressort).

$E = E_c + E_{pe} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$ **(0,25 pt)**

c- Déterminons les valeurs E_1 et E_2 de l'énergie mécanique respectivement aux instants $t_1 = 0,5s$ et $t_2 = 0,75s$.

Aux instants $t_1 = 0,5s$ et $t_2 = 0,75s$, la vitesse du solide est nulle et $x = X_m$ alors l'énergie mécanique s'écrit : $E = \frac{1}{2}KX_m^2$

Alors $E_1 = \frac{1}{2}KX_{1m}^2 \approx 0,47.10^{-2}$ J et $E_2 = \frac{1}{2}KX_{2m}^2 \approx 0,28.10^{-2}$ J. **(0,75 pt)**

d- Comparons E_1 et E_2 et interprétons.

$E_1 > E_2$ il y a perte d'énergie. Une partie de l'énergie E_1 se transforme en chaleur a cause des frottements. **(0,5 pt)**

II-

1°) a - Le dispositif qu'exerce la force $\vec{F}$ est appelé excitateur, son rôle est d'entretenir le mouvement en compensant l'énergie perdue par les frottements. **(0,25 pt)**

b- L'oscillateur est forcé à osciller avec une fréquence imposée par l'excitateur c'est pour cela $N = N_e$ ou $w = w_e$. **(0,25 pt)**

2°) a- Complétons, à l'échelle, la construction de Fresnel.

$F_m = 0,4$ N est la valeur d'un vecteur représentée de 4 cm.

(0,5 pt)

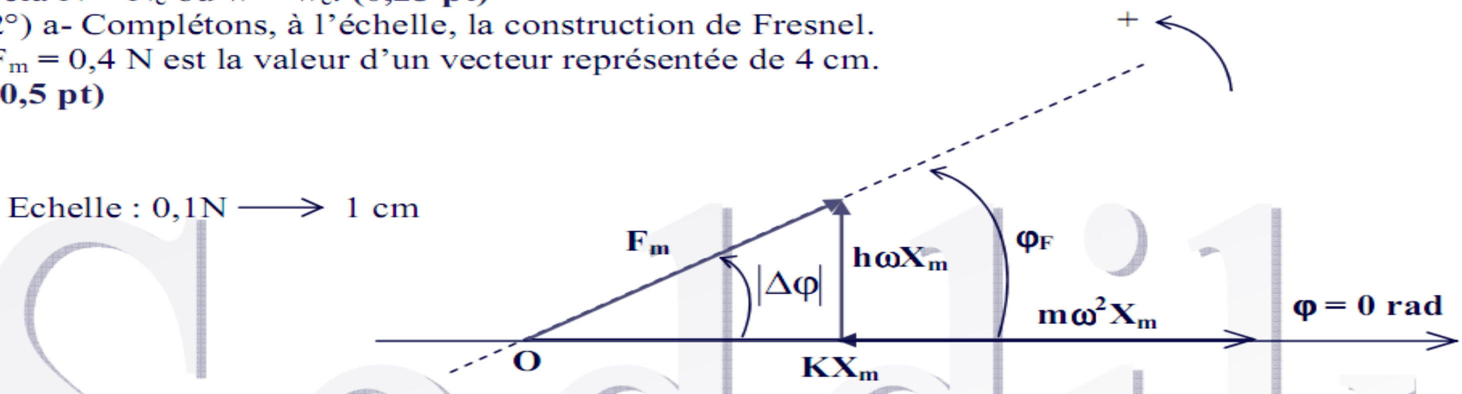


Figure 2

b- Déterminons la valeur de h et m

- $h\omega X_m$ est représentée par 2 cm donc $h\omega X_m = 0,2$ N d'où $h = \frac{0,2}{\omega X_m} = 0,2$ Kg.s^{-1}

(0,5 pt)

- $m\omega^2 X_m$ est représentée par $\approx 4,55$ cm donc $m\omega^2 X_m = 0,45$ N d'où $m = \frac{0,45}{\omega^2 X_m} \approx 0,27$ g.

c- Etablissons les expressions de l'amplitude X_m et de **tg (φ_F)** en fonction de **h, m, K** et **w**.
D'après la propriété du triangle rectangle (Pythagore), on a :

$F_m^2 = (K - mw_e^2).X_m^2 + h^2 w_e^2 X_m^2$ d'où $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2w^2 + (K - mw^2)^2}}$

et $tg(\varphi_{F_e} - \varphi_x) = tg(\varphi_{F_e}) \dfrac{hw_e}{K - mw_e^2} = \dfrac{hw_e}{m(w_0^2 - w_e^2)}$ puisque $\varphi_x = 0$ rad **(0,75 pt)**

3°) a- Calculons la fréquence de résonance d'élongation N_r.

$N_r = \sqrt{N_0^2 - \dfrac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$ = 4,1 Hz **(0,25 pt)**

b- Déduire la valeur X_{mr} de l'amplitude de l'élongation à la résonance.

En remplaçant la valeur de N_r dans celle de X_{mr}. $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{h^2(2\pi N_r)^2 + (K - m(2\pi N_r)^2)^2}}$

On trouve X_m = 7,64 cm. **(0,25 pt)**

c- Déterminons $\|\vec{T}\| = K.X_m = 1{,}22\text{ N} > \|\vec{T}\|_m$ Alors le ressort risque d'être endommagé.

(0,5 pt)

d- Pour éviter ce risque, on peut ou bien augmenter les frottements ou s'éloigner de la fréquence de résonance. **(0,5 pt)**

4°) a- Tableau d'analogie mécanique-électrique

	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
Grandeurs	x v m K h F	q i L $\frac{1}{C}$ R+r u

Par analogie mécanique électrique, donnons les expressions de :

- la charge maximale $Q_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 w_e^2 + (\frac{1}{C} - Lw_e^2)^2}}$

- $N_e = \sqrt{N_0^2 - \dfrac{(R+r)^2}{8\pi^2 L^2}}$

(0,25 pt)

b- Déduire le rapport $\dfrac{U_m}{I_m}$ en fonction de **R, L,C** et **N**

Le rapport

$\dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{U_m}{\omega Q_m} = \dfrac{U_m\sqrt{(R+r)^2 w_e^2 + (\frac{1}{C} - Lw_e^2)^2}}{\omega.U_m} = \dfrac{U_m\omega\sqrt{(R+r)^2 + (\frac{1}{C2\pi N_e} - L2\pi N_e)^2}}{U_m\omega} =$

Donc $\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{\omega Q_m} = \sqrt{(R+r)^2 + (\frac{1}{C2\pi N_e} - L2\pi N_e)^2}$ appelé impédance électrique.

(0,5 pt)

c- Donnons, par analogie, l'expression de l'impédance mécanique et déterminons sa valeur pour $N = \frac{10}{\pi}$ Hz.

$$Z_m = \sqrt{h^2 + (\frac{K}{2\pi N_e} - m2\pi N_e)^2} = \frac{F_m}{V_m} = \frac{F_m}{.\omega X_m} = 0,4\,Kg.s^{-1}$$

(0,5 pt)

5°) a- Montrons que la puissance mécanique moyenne s'écrit $P_m = \frac{h}{2}.V_m^2$

La puissance électrique moyenne consommée par un circuit électrique R,L,C série est

$P_m = U.I.\cos(\varphi_u - \varphi_i) = Z.I.I.\frac{(R+r)}{Z} = (R+r).I^2 = (R+r)\frac{I_m^2}{2}$

En utilisant le tableau d'analogie précédent, on peut écrire $P_m = \frac{h}{2}.V_m^2$

b- Calculer $\mathbf{P_m}$ si : $\mathbf{N} = \frac{10}{\pi}$ Hz

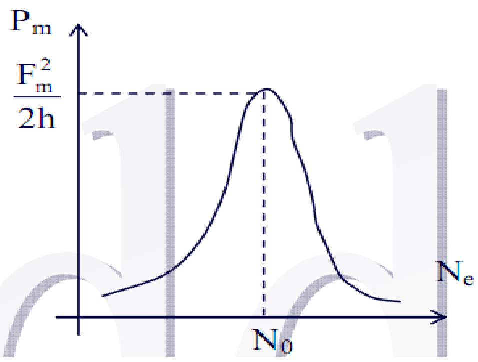
On trouve $\mathbf{P_m = 0,1}$ **w. (0,25 pt)**

c- Montrer qu'il y a résonance de puissance pour $\mathbf{N = N_0}$. avec $\mathbf{N_0}$ la fréquence propre des oscillations.

En s'inspirant de la résonance d'intensité qui se produit pour $\mathbf{N = N_0}$ avec $\mathbf{N_0}$ la fréquence propre des oscillations, Alors par analogie la résonance de vitesse se produit pour $\mathbf{N = N_0}$**.** Alors à cette fréquence, la puissance mécanique est maximale. On parle alors de résonance de puissance. **(0,25 pt)**

d- Traçons l'allure de la courbe : **P = g (N).**

(0,25 pt)



Exercice N°2

Exercice N°1

I – (3,5 points)

1°) a- Précisons la nature des oscillations du pendule.

L'enregistrement mécanique donne une sinusoïde alors les oscillations sont de type sinusoïdale. **(0,5 pt)**

b- Donnons l'équation différentielle des oscillations en x.

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ **(0,25 pt)**

2°) Déterminons graphiquement

a- L'amplitude $X_m = 4$ cm **(0,25 pt)** b- La période propre $T_0 = 0{,}75$ s **(0,25 pt)** on peut déduire $K = 4\pi^2 \frac{m}{T_0^2} = 28{,}5\ N.m^{-1}$. **(0,5 pt)**

3°) a- Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système S = {(C), (R)} à un instant de date t.

$E = E_c + E_{pe} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$ **(0,25 pt)**

b- Justifier que le système S est conservatif.

$\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt}(\frac{d^2x}{d^2t} + \omega^2 x) = 0$ car $(\frac{d^2x}{d^2t} + \omega^2 x) = 0 \Leftrightarrow$ l'énergie est constante le système est dit conservatif. **(0,25 pt)**

c- Déduisons que l'expression de l'énergie cinétique peut s'écrire

$E_C = A - \frac{1}{2}Kx^2$,

$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} \Leftrightarrow E_C = E - \frac{Kx^2}{2}$ **(0,25 pt)** par identification A = E l'énergie du système **(0,25 pt)**

d-

- Retrouvons la valeur de K

La courbe représente une fonction affine de la forme $E_C = a.x^2 + b$. par identification la pente

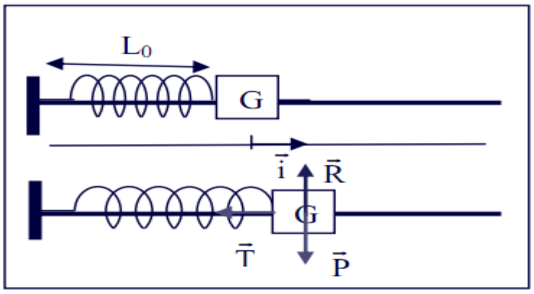
$a = -\frac{228}{16} = -\frac{1}{2}K \Leftrightarrow K = 28{,}5\ K.N^{-1}$ **(0,5 pt)**

- On déduit aussi $A = E_C(0) = 228.10^{-4}$ J **(0,25 pt)**

II-(5,5 points)

1°) L'excitateur fournit de l'énergie à l'oscillateur pour entretenir son mouvement. **(0,5 pt)**

2°) Etablissons l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x du solide.



On applique la R.F.D au système $\{C\}$

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

Bilan des forces

$\vec{T}, \vec{P}, \vec{R}, \vec{f}, \vec{F}$: forces extérieures.

$\vec{R} + \vec{P} + \vec{f} + \vec{F} + \vec{T} = m\vec{a}$ après projection T +F+f = ma

$\Leftrightarrow -Kx - hv + F = ma$

$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = F$ Equation différentielle d'un oscillateur mécanique forcé. **(0,5 pt)**

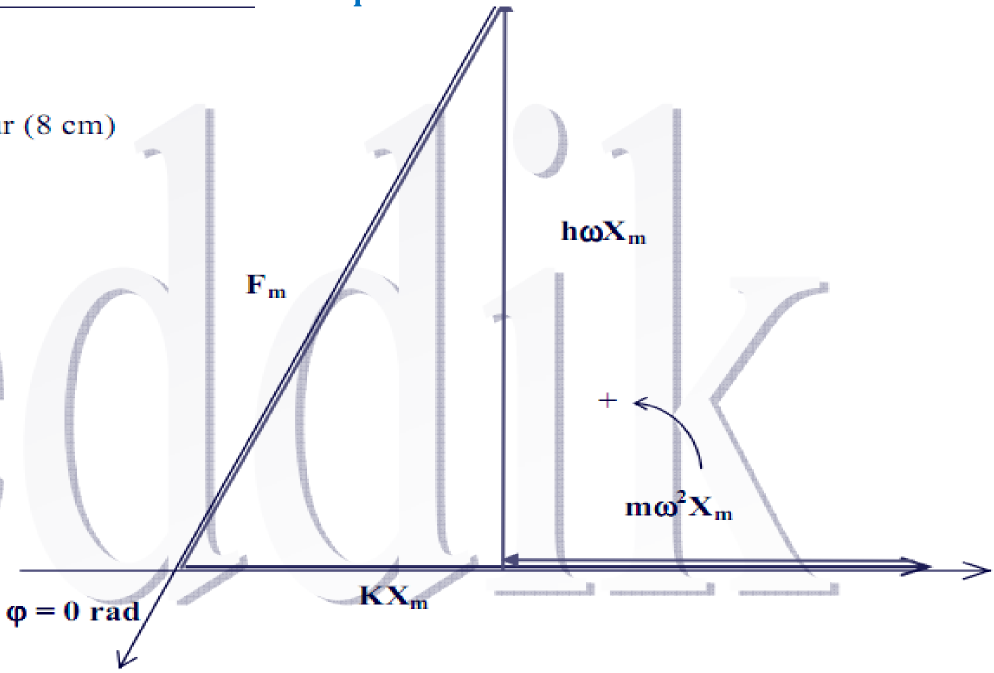
3°) a- Précisons la désignation du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la fonction $m\frac{d^2x}{dt^2}$ car $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ deux vecteurs opposés puisque

$m\frac{d^2x}{dt^2}$ et Kx sont deux fonctions en opposition de phase. **(0,5 pt)** b- Construction de Fresnel

F_m est représentée par un vecteur (8 cm)

(0,75 pt)



c- Déterminons X_m et h

Le vecteur de valeur KX_m est représenté par 9,1 cm donc $KX_m = \frac{9,1}{4} = 2,275\,N \Leftrightarrow X_m = \frac{2,275}{28,5} = 8\,cm$

Le vecteur de valeur $h\omega X_m$ est représenté par 6,9 cm donc

$h\omega X_m \frac{6,9}{4} = 1,725\,N \Leftrightarrow h = \frac{1,725}{2\pi.8.10^{-2}} = 3,43\,Kg.s^{-1}$ **(0,5 pt)**

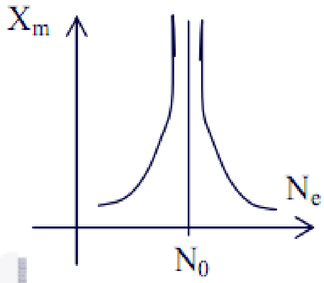
4°) a- Pour $N = N_a$ et $N = N_b$, X_m prend une valeur une valeur maximale. Donc l'oscillateur est en résonance d'élongation. **(0,25 pt)**

b- Attribuant à chaque courbe une valeur de h.

$h_2 < h_1 \Leftrightarrow X_{1m} < X_{2m}$ alors h_1 correspond la courbe (b) et h_2 correspond la courbe (a). **(0,5 pt)**

c- La valeur N_r fréquence représente la fréquence de résonance. **(0,25 pt)**

Lorsque $h \longrightarrow 0$; $\lim_{N_r \to N_0} X_m = \infty$ **(0,25 pt)**



5°) a- Déterminer l'expression de la puissance.

$P_m = \frac{hV_m^2}{2} = \frac{hF_m^2}{2Z_m}$ = Donc $P_m = \frac{h\,F_m^2}{2[h^2 + (m\omega - \frac{K}{\omega})^2]}$ **(0,5 pt)**

b- La puissance est maximale si $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 8,44\,rad.s^{-1}$ **(0,25 pt)**

c- Pour $\omega = \omega_0$; $P_m = \frac{F_m^2}{2h} = 0,58\,J$ **(0,25 pt)**

Exercice N°1 (7 points)

I- Etude expérimentale

1°) Expérience 1 :

a- Précisons l'état du système pour $N_e = N_1$

L'élongation atteint une valeur maximale pour une valeur N_1 de N_e alors le système en état de résonance d'élongation. **(0,5 pt)**

b- Comparons, en justifiant et sans calcul, N_1 à N_0.

A la résonance l'élongation la fréquence de résonance $N_r < N_0$ fréquence propre d'où $N_1 < N_0$. **(0,5 pt)**

2°) Expérience 2 :

Déterminons la période des oscillations.

La période du cylindre T' = 2.T alors $T = \frac{T'}{2} = \frac{1}{2N'} = \frac{2\pi}{35} = 0{,}179\,s$ **(0,5 pt)**

3°) Expérience 3 :

a- Justifions que la courbe (b) correspond à x(t).

L'élongation x(t) est toujours en retard par rapport à la force excitatrice alors la courbe (b) correspond à x(t). **(0,5 pt)**

b- Déduisons, en justifiant, la période des oscillations T est la fréquence N.

Les oscillations sont forcées alors $T = T_e = 2\pi/35$ s. **(0,5 pt)**

c- Déterminons le déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_F - \varphi_x)$.

$\Delta\varphi >$ alors $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}.\frac{\pi}{210} = \frac{35\pi}{210} = \frac{\pi}{6}$ rad **(0,5 pt)**

d- Déterminons l'expression de x(t).

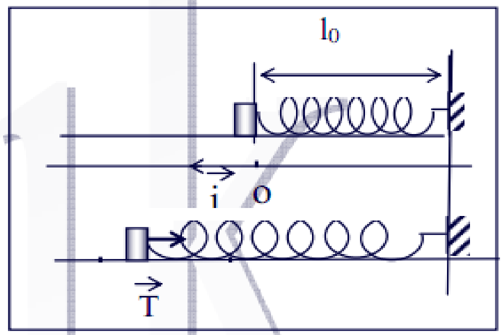
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{6}$ rad alors $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ rad d'où $x = 4.10^{-2}\sin(35t - \frac{\pi}{6})$ **(0,5 pt)**

II- Etude théorique

1°) Equation différentielle

Un système non représenté exerce sur le solide S une force $\vec{F} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F).\ \vec{i}$

On applique la R.F.D au système $\{S\}$



$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

Bilan des forces

$\vec{T}$, $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{f}$ et $\vec{F}$: forces extérieures.

$\vec{f}$ est la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$; $\vec{F}$ force excitatrice

$\vec{f} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$ après projection $T + f + F = ma$

$\Leftrightarrow -Kx - hv + F = ma \quad \Leftrightarrow \quad ma + hv + Kx = F$

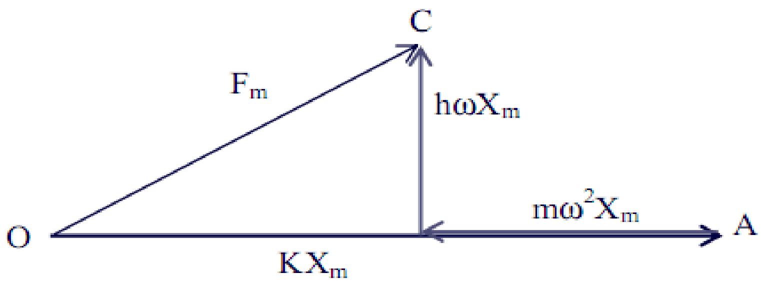
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + h\dfrac{dx}{dt} + Kx = F$ équation différentielle d'un oscillateur mécanique en oscillations forcées.

(0,5 pt)

2°) a- Complétons la construction de Fresnel

Echelle 2 cm $\longrightarrow$ 1 N

(0,5 pt)



a- Déduisons à partir de cette construction :

- la valeur $\mathbf{F_m}$ de F ;

Le vecteur de valeur $\mathbf{F_m}$ associé à F est représenté par $\vec{V}$ (5 cm) donc $F_m = \frac{5}{2} = 2{,}5\,N$ **(0,5 pt)**

- la valeur du coefficient du frottement **h ;**

Le vecteur de valeur $\mathbf{h\omega X_m}$ associé à $h\frac{dx}{dt}$ est représenté par $\vec{V}_2$ (2,5 cm) donc

$h = \frac{1{,}25}{35.4.10^{-2}} = 0{,}9\,Kg.s^{-1}$ **(0,5 pt)**

- La valeur de la masse m.

Le vecteur de valeur $\mathbf{m\omega^2 X_m}$ associé à $m\frac{d^2x}{dt^2}$ est représenté par $\vec{V}_3$ (3,5 cm) donc

$m = \frac{1{,}75}{35^2.4.10^{-2}} = 36\,g$. **(0,5 pt)**

3°) * Par analogie électrique mécanique, montrons que l'oscillateur est en résonance de vitesse

Lorsque le déphasage $\Delta\varphi = (\varphi_u - \varphi_q) = \frac{\pi}{2}$ rad or $\varphi_q = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ donc $\varphi_u - \varphi_i + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi_u - \varphi_i = 0$ rad

Alors l'oscillateur électrique en résonance d'intensité.

Par analogie électrique mécanique on peut dire que si $\Delta\varphi = (\varphi_f - \varphi_x) = \frac{\pi}{2}$ rad alors le système est en résonance de vitesse. **(0,5 pt)**

* Déduisons la valeur de N_2.