Liste d'exercices n°2 : Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Exercice 1 :

I/Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si le $PPCM$ de deux entiers naturels est un multiple de 21 alors au moins l'un d'eux est un multiple de 21.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2n+1$ et $2n+3$ sont premiers entre eux.
3. Il existe deux entiers naturels a et b tel que $5a + 20b = 49$.
4. $a \in \mathbb{N}^*$, a est pair, $b \in \mathbb{N}^*$, b est impair donc $a \wedge b = 1$.
5. a, b et c trois entiers naturels non nuls
   a et b sont des multiples de c si et seulement si ab est un multiple de c.
6. $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)(3n^2+8n+5) \vee (3n^2+5n) = (n+1)^2(3n^2+5n)$.
7. $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $d = a \wedge b$, $m = a \vee b$,
   si $2m + d$ est premier alors $d = 1$.

II/Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

III/Soit $n > 2$. On considère $A = n^2 - n + 4$ et $B = n + 1$.

1. a) Montrer que $A \wedge B = B \wedge 6$.
   b) (Déduire que $A \wedge B = 3$) si et seulement si (B est impair et B est divisible par 3).
   c) Donner alors les valeurs de n pour que $A \wedge B = 3$.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on A est divisible par B.

IV/Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant : $\begin{cases}(a \vee b) - 3(a \wedge b) = 108 \\ 10 < a \wedge b < 15\end{cases}$

Exercice 2 :

L'exercice comporte deux parties indépendantes

I/ 1. Décomposer 377 en produit de facteurs premiers.
2. Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $x = 2a + b$ et $y = 5a + 2b$.
   a) Calculer $y - 2x$ et $5x - 2y$.
   b) Montrer que $a \wedge b = (2a + b) \wedge (5a + 2b)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système système suivant : $\begin{cases}(2a+b)(5a+2b) = 1508 \\ ab = 2(a \vee b)\end{cases}$

II/ x et y étant deux entiers naturels, on considère l'équation $(E) : 8x - 11y = 55$.
1. a) Vérifier que $(11, 3)$ est une solution particulière de (E).
   b) Montrer que $8x - 11y = 55 \Leftrightarrow 8(x - 11) = 11(y - 3)$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit d le $PGCD$ de $n+1$ et $(n+1)(n-2)+3$.
   Montrer que $d = 1$ ou $d = 3$.
2. On considère les entiers a et b définis par $a = (n+1)^2$ et $b = n^3 + 1$.
   a) Vérifier que $n^3 + 1 = (n+1)[(n+1)(n-2)+3]$.

b) Soit u le $PGCD$ de a et b.
Montrer que $u = n + 1$ ou $u = 3(n + 1)$.

3. Soit P le polynôme défini par $P(x) = 13x^3 - 70x^2 - 140x - 49$.
   a) Montrer que $P(n) = 0$ équivaut à $70a - 13b = 8$.
   b) On suppose que $u = n + 1$. Déterminer n tel que $70a - 13b = 8$.
   c) On suppose que $u = 3(n + 1)$. Existe-t-il un entier n tel que $70a - 13b = 8$?
   d) En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{N}$ une seule solution.