liste d'exercices : Géométrie dans l'espace

***Exercice* 1 :**

On considère l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(o, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
On considère les points $A(3,1,0)$, $B(1,2,0)$, $C(3,2,1)$ et $D(0,0,d)$ où d désigne un réel positif ou nul. On a ainsi un tétraèdre $ABCD$.

1. a) On pose $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{n}$.
   b) En déduire l'aire du triangle ABC.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   a) On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\overrightarrow{n}$.Calculer λ en fonction de d.
   b) En déduire l'expression de la distance DH. Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $\vartheta_d = \dfrac{2d+5}{6}$.
3. a) Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).
   b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(S-d)$ de centre D et passant par B.
   c) Donner suivant les valeurs de d l'intersection $S_d \cap (ABC)$.

***Exercice* 2 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne les points $A(3,1,1)$, $B(0,0,1)$, $C(1,1,2)$ et $I(1,2,-1)$.

1. a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduire que A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Soit le plan $P = (ABC)$ .Montrer que $P : x - 3y + 2z - 2 = 0$.
   c) Calculer le volume du tétraèdre $IABC$.
2. Soit l'ensemble $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$.
   Montrer que S est une sphère de centre I et dont on précisera son rayon.
3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par I et perpendiculaire à P.
   b) Déterminer les coordonnés du point H intersection de P et Δ.
   c) Montrer que S et P sont sécants en un cercle dont on précisera son centre et son rayon.
4. a) Vérifier que A appartient à S.
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A.
   c) Déterminer une équation de la sphère S' de centre B et tangent à Q.

***Exercice* 3 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère les points $A(0,1,0)$; $B(1,0,-2)$; $C(0,0,-1)$ et $D(1,-1,0)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$.
   b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P et que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   c) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $DABC$, puis déduire la distance D à P.
2. a) Montrer qu'une équation du plan P est : $x - y + z + 1 = 0$.
   b) Montrer que $H(0,0,-1)$ est le projeté orthogonale de D sur P .
3. On considère $S = \{M(x,y,z) \ telque \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0\}$.
   a) Vérifier que $E(2,-2,\sqrt{2})$ est un point de S.
   b) Montrer que S est une sphère dont on caractérisera.

c) Montrer que P et S sont sécante suivant un cercle ζ que l'on caractérisera.

4. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que le triangle DME soit isocèle et rectangle en D.

***Exercice* 4 :**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Partie A

1. Construire le cube $ABCDEFGH$.
2. On note I le milieu de $[GB]$, j le milieu de $[GF]$ et L point variable de $[AH]$ distinct de A et H. **Sans utiliser les coordonnées du point** L.
   a) Déterminer $\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{HL}$.
   b) Montrer que $\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GH}$.
   c) Calculer l'aire du triangle GIL.
   c) Calculer le volume du tétraèdre $GILC$.
3. On pose $\overrightarrow{AL} = \alpha\overrightarrow{AH}$ avec $\alpha \in]0, 1[$.
   a) Vérifier que les coordonnées du point L sont $(0, \alpha, \alpha)$.
   b) Montrer que la distance du point L à la droite (IJ) est égal à $d(\alpha) = \sqrt{(\frac{1}{2} - \alpha)^2 + 1}$.
   c) Déterminer la position du point L pour que la distance $d(\alpha)$ soit minimale.

Partie B

1. Donner une équation du plan P contenant les point B, D et G.
2. On considère le cercle ζ de centre I et de rayon 1 situé dans le plan d'équation : $x + y - z - 1 = 0$ Déterminer les sphères contenant ζ et de rayon 2. **(les parties A et B sont indépendantes)**.

***Exercice* 5 :**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit S la sphère dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 19 = 0$.

1. Déterminer le centre I et le rayon de S.
2. Soit m un paramètre réel et P_m le plan d'équation : $x - 2y - 2z + m = 0$.
   a) Déterminer suivant les valeurs de m la position relative de P_m et S.
   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles P_m et S sont sécants suivant un cercle de rayon 4.
   c) Montrer que $P_2 \cap S$ est un cercle (C)) de centre $H(0, 1, 0)$.
3. Soit D la droite passant par $A(-4, -2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$
   a) Calculer la distance $d(H, D)$.
   b) Montrer que D et P_m sont parallèles pour tout réel m.
   c) Déterminer la valeur de m pou laquelle $D \subset P_m$.
   d) En déduire la position de D et (C).