Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Exercice 1 :

n désigne un entier naturel.

1. a) Montrer par récurrence que $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.
   b) Déduire le reste de la division euclidienne de $2^{3n} + 5$ par 7.
2. a) Montrer que $(n-1) \wedge (n+3) = (n+3) \wedge 4$ pour tout $n > 1$.
   b) Quelles valeurs peuvent prendre le pgcd de $(n-1)$ et $(n+3)$?
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(n-1)$ divise $(n+3)$.
3. a) Développer $(n-1)(n+3)$.
   b) Montrer que pour tout $n > 1$, les entiers $(n-1)$ et $n^2 + 2n - 2$ sont premiers entre eux.
   c) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n-1)(2n+1)$ divise $(n+3)(n^2+2n-2)$.

Exercice 2 :

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $(9^n - 1)$ est divisible par 8.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $(3^{2n+1} - 3)$ est divisible par 8.
   c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne de 3^{2015} et par 8.
2. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels solutions des systèmes suivant :

   (S) $\begin{cases} a + b = 144 \\ a \wedge b = 12 \end{cases}$ (S') $\begin{cases} a \vee b = 30 \\ a \wedge b = 5 \end{cases}$ (S") $\begin{cases} a \vee b = 60 \\ a + b = 35 \end{cases}$
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; les entiers $(n+1)$ et $(n^2 + 3n + 3)$ sont premiers entre eux.
   b) En déduire les entiers naturels n tels que $(n+1)$ divise $(n+17)(n^2+3n+3)$.

Exercice 3 :

On considère la suite Y_n définie par $Y_n = 4^n + 5^n$.

1. a) Montrer que pour tout entier n, 4^n et 5^n sont premiers entre eux.
   b) Montrer que pour tout entier naturel non nuls x et y, $(x+y) \wedge (4x+5y) = x \wedge y$.
   c) En déduire que Y_n et Y_{n+1} sont premiers entre eux.
2. a) Montrer que $Y_n \wedge Y_{n+2}$ divise $(9 \times 4^n) \wedge (9 \times 5^n)$.
   b) En déduire que $Y_n \wedge Y_{n+2} = 1$ ou 3 ou 9.
3. a) Montrer par récurrence sur k, Y_{2k+1} est divisible par 9.
   b) En déduire que $Y_{2k+1} \wedge Y_{2k+3} = 9$.
4. a) Montrer par récurrence sur k, que Y_{2k} n'est pas divisible par 3.
   b) En déduire que $Y_{2k} \wedge Y_{2k+2} = 1$