

Date : février/2015

Devoir de contrôle N°2

Niveau: 4^{ème} info

Nombre de pages : 2

Durée : 2h

MATHEMATIQUESN.B : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.**EXERCICE N° 1 (8 pts)**

On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $11x - 7y = 5$ où x et y sont des inconnues entières.

- 1) Justifier pourquoi (E) admet des solutions.
- 2) Montrer que si $(x ; y)$ est une solution de (E), alors $x \equiv 2y[5]$.
- 3) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
- 4) En déduire une solution particulière de l'équation (E).
- 5) Résoudre l'équation (E).
- 6) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note C l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$. Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble C et dont les coordonnées sont des entiers.

EXERCICE N° 2 (12 pts)**Partie A**

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

- 1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- b) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{(2x-1).(2x+1)}{x}$.
- c) Dresser le tableau des variations de g et calculer $g(\frac{1}{2})$.
- d) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x+1 + \frac{\ln x}{x}$.

note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- 1) a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

Interpréter graphiquement.

- c) Montrer que la droite $\Delta : y = 2x+1$ est une asymptote à (C), puis étudier la position relative de (C) par rapport à Δ .

- 2) a) vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau des variations de f .

- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α et que $0,4 < \alpha < 0,5$.

- 4) tracer Δ et (C) dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- 5) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$.

a) Calculer $h'(x)$.

b) En déduire l'expression de $F(x)$ où F est la primitive de f sur $]0, +\infty[$

qui s'annule en 1.

c) Dresser le tableau des variations de F .

d) Vérifier que $F(\alpha) = 2\alpha^4 + 2\alpha^3 + \frac{3}{2}\alpha^2 + \alpha - 2$.