L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$.

Partie A

1) Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+y+z-3=0$$

Prouver que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

3) Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.

4) Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées $(0;4;-1)$. Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2) Calculer le volume du tétraêdre ABCD

3) Prouver que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.

4) a) Calculer l'aire du triangle BDC.

b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Partie A

1) Montrons que le triangle ABC est rectangle en A. Pour cela calculons le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3;3;3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (3;0-3)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\times 3+3\times 0-3\times 3=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

2) Si $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

Or l'équation de $\mathscr{P}$ est : $x+y+z-3=0$ donc le vecteur $\vec{n}(1;1;1)$ est un autre vecteur normal de $\mathscr{P}$. Donc si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, il doit être colinéaire à $\vec{n}$. Or on sait que $\overrightarrow{AB}\,(3;3;3)$, on a donc : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB)

3) Si $\mathscr{P}'$ est orthogonal à (AC), alors $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. Comme $\mathscr{P}'$ passe par A, alors un point M quelconque de $\mathscr{P}'$ vérifie :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0\\
3(x-3)+0(y+2)-3(z-2) &= 0\\
3x-3z-3 &= 0\\
x-z-1 &= 0
\end{aligned}$$

Conclusion : Le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne : $x-z-1=0$

4) On cherche un vecteur directeur de l'intersection des deux plans. On obtient donc le système suivant :

$$\Delta \begin{cases} x+y+z-3=0 & (1)\\ x \quad -z-1=0 & (2)\end{cases}$$

Si on privilégie le paramètre z, c'est à dire que l'on exprime x et y en fonction de z, on obtient :

A partir de (2) : $x = z+1$

en remplaçant dans (1) : $z+1+y+z-3=0$ d'où $y=-2z+2$
Pour trouver un vecteur directeur de Δ, comme on sait que cette droite passe par A, il suffit de trouver un autre point de Δ, c'est à dire de donner une valeur à z. Soit en prenant $z=1$, on obtient le point $\mathrm{E}(2;0;1)$. On obtient alors comme vecteur directeur : $\vec{u}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{EA} = (3-2;-2-0;2-1) = (1;-2;1)$$

Partie B

1) Pour prouver que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan, soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD} = (-3;6;-3)$

On calcule alors les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} &= -3\times 3+6\times 3-3\times 3=0\\
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} &= -3\times 3+6\times 0-3\times(-3)=0
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. La droite (AD) est donc perpendiculaire au plan (ABC).

2) On rappelle le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre (plus généralement d'une pyramide) :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

En appliquant cette formule à ABCD. On prend comme base le triangle ABC rectangle en A. Comme la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), AD est la hauteur issue de D sur ABC. On a alors :

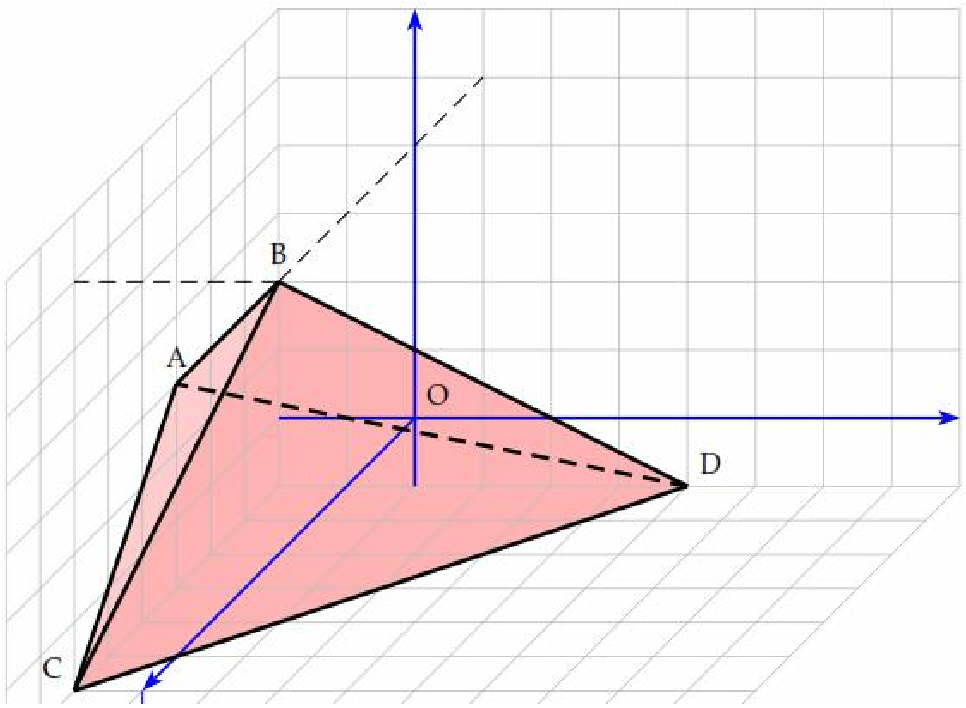
$$\mathcal{V}_{(\mathrm{ABCD})} = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}) \times \mathrm{AD}}{3} = \frac{(\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}) \times \mathrm{AD}}{6}$$

On calcule les différentes distances :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$
$$\mathrm{AC} = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\mathrm{AD} = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

On obtient alors : $\mathcal{V}_{(ABCD)} = \dfrac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{6} = 27$

Remarque : On peut donner une représentation de ce tétraèdre (représentation pas toujours aisée pour que cela soit clair).



3) Pour calculer l'angle $\widehat{BDC}$, on utilise la troisième définition du produit scalaire :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BDC}) = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC}$$

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$, ainsi que les distances DB et DC :

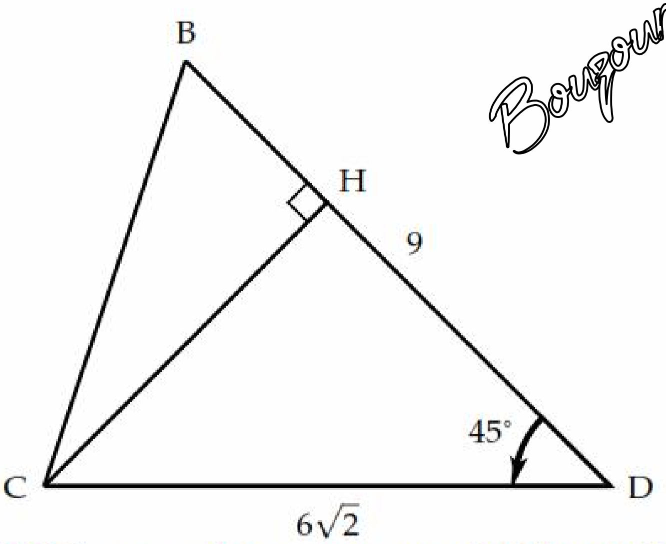
$$\overrightarrow{DB} = (6;-3;6) \qquad DB = \sqrt{6^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$\overrightarrow{DC} = (6;-6;0) \qquad DB = \sqrt{6^2+(-6)^2+0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 + (-3) \times (-6) + 6 \times 0 = 54$$

On obtient alors : $\cos(\widehat{BDC}) = \dfrac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a donc bien : $\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}$

4) a) Faisons une figure avec les données que l'on dispose :



Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BDC, on a alors, en posant H le projeté orthogonal de C sur [DB]

$$\mathscr{A} = \frac{DB \times CH}{2}$$

Pour calculer CH, utilisons le triangle DHC rectangle en H :

$$CH = \sin\frac{\pi}{4} \times DC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6\sqrt{2} = 6$$

b) Pour trouver la distance de A au plan (BDC), il faut connaître la hauteur issue de A sur le triangle BDC. Utilisons alors le volume $\mathcal{V}_($ABCD) du tétraèdre en appelant H′ le projeté orthogonal de A sur le plan (BDC). On a alors :

$$\mathcal{V}_{(ABCD)} = \frac{\mathscr{A} \times \mathrm{AH'}}{3} = 9\mathrm{AH'}$$

Or on sait que : $\mathcal{V}_{(\mathrm{ABCD})} = 27,$ on en déduit alors que : $\mathrm{AH'} = 3.$