

Date : 10/12/2014

Devoir de synthèse N°1

Niveau: 4^{ème} info

Nombre de pages : 2

Durée : 2h

MATHEMATIQUESN.B : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.**EXERCICE N° 1 (3 pts)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est juste. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie (aucune justification n'est demandée) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1) Soit z un nombre complexe, $|z-2|$ est égal à :

a. $|z| + 2$

b. $|\bar{z} + 2|$

c. $|\bar{z} - 2|$.

2) Si A et B sont les points dont les affixes sont les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $250z^2 - 1000iz + 1014 - 11015i = 0$, alors le milieu de $[AB]$ est :

a. $K(0 ; 2)$

b. $K(2 ; 0)$

c. $K(0 ; -2)$.

3) L'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z| = |\bar{z} - 2i|$ est :

a. la droite $y=1$ b. la droite $y=-1$

c. le cercle de centre O et de rayon 2

EXERCICE N° 2 (6 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et ζ sa courbe dans un

repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On admet que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement .

b) Déterminer $f(\mathbb{R})$.

2) Montrer que le point $I(0 ; 1)$ est un point de ζ et qu'il est un centre de symétrie de ζ .

3)a) Montrer que la fonction définie par $g(x) = f(x) + x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

b) En déduire que l'équation $f(x) = -x$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α , puis que $-1 < \alpha < 0$.

c) Vérifier que $\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$.

4) Montrer que les droites $\Delta : y = x$ et $\Delta' : y = x+2$ sont deux asymptotes obliques à la courbe ζ' de la fonction g .

EXERCICE N° 3 (5 pts)

On considère la suite définie sur \mathbb{N}^* par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)}{2n} \cdot u_n \end{cases} .$$

- 1) Calculer u_2 et u_3 .
- 2) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $u_n > 0$.
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) En déduire que (u_n) est convergente.
- 3) Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = \frac{u_n}{n}$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme v_1 .
b) En déduire que pour tout $n \geq 1$; $u_n = \frac{n}{2^n}$.

EXERCICE N° 4 (6 pts)

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.
(on pourra raisonner par récurrence)
b) En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est divisible par 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est divisible par 7 .
- 2) Soit p un entier naturel , donner le reste de la division euclidienne de 2^p par 7 dans les trois cas suivant :
 - a) $p=3n$; $n \in \mathbb{N}$
 - b) $p=3n+1$; $n \in \mathbb{N}$
 - c) $p=3n+2$; $n \in \mathbb{N}$
- 3) Soit $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$. Montrer que A_p est divisible par 7 si et seulement si $p= 3n+1$ ou $p = 3n+2$; $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Soit $a = 1000100010000$ écrit dans le système binaire (base 2).
 - a) Montrer que dans la base 10 a s'écrit sous la forme A_p .
 - b) En déduire que a est divisible par 7.