

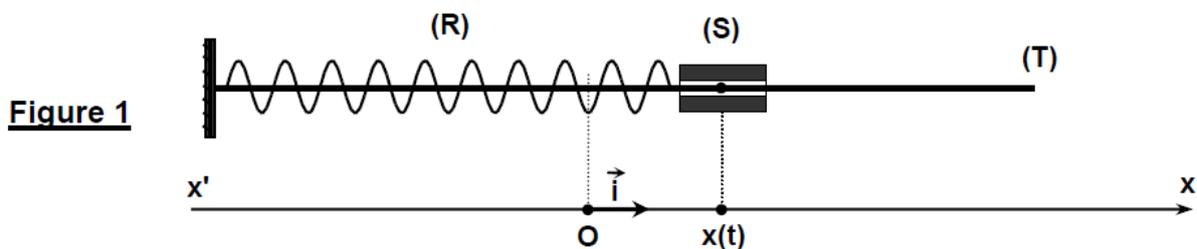
Série n° 13

Oscillations mécaniques libres

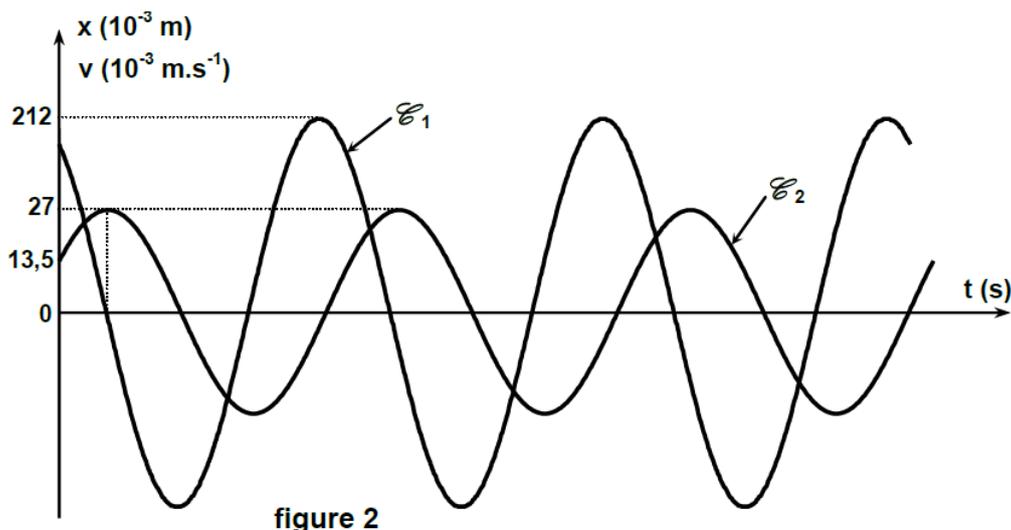
Exercice n° 1 : (Bac 2011 – 4^{ème} Techniques – Session de contrôle)

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse m pouvant coulisser, sans frottement, sur une tige horizontale (T). Le solide (S) est attaché à un ressort, à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur k . La position du centre d'inertie G de (S) est repérée par son abscisse $x(t)$ sur un axe horizontal ($x'Ox$). L'origine O des abscisses est confondue avec la position de G lorsque (S) est à l'équilibre.

Écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné à un instant de date $t = 0$ s, le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point O. À un instant de date t , le système est représenté comme l'indique la **figure 1**.



- 1) a) Représenter sur la **figure 1** les forces extérieures exercées sur (S) à l'instant de date t .
 b) Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'abscisse $x(t)$ du centre d'inertie G. En déduire la nature de son mouvement.
- 2) À l'aide d'un dispositif approprié, on enregistre l'évolution de l'abscisse $x(t)$ et celle de la vitesse $v(t)$ de G. On obtient les courbes \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 de la **figure 2**.



- a) Montrer que la courbe \mathcal{E}_1 correspond à $v(t)$.
- b) À partir des courbes, déterminer les amplitudes respectives X_{\max} et V_{\max} de $x(t)$ et de $v(t)$. En déduire la valeur de pulsation propre ω_0 .
- c) Déterminer la phase initiale φ_x de $x(t)$.

3) L'énergie totale E du système {ressort + solide} est constante : $E = 3,645 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

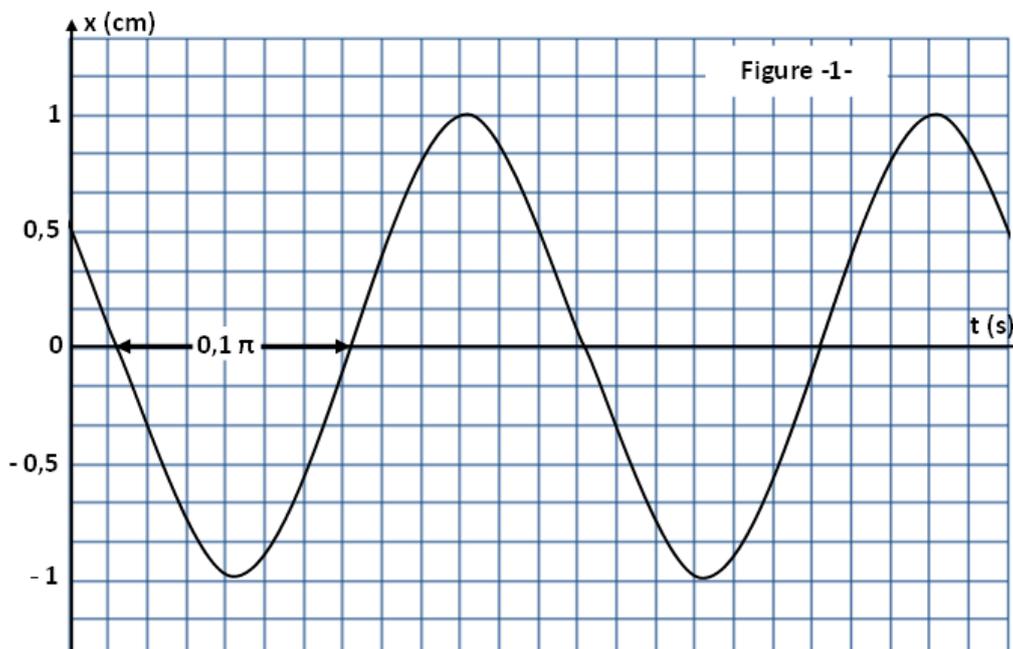
- Donner l'expression de E en fonction de k et X_{max} .
- En déduire les valeurs de k et m .

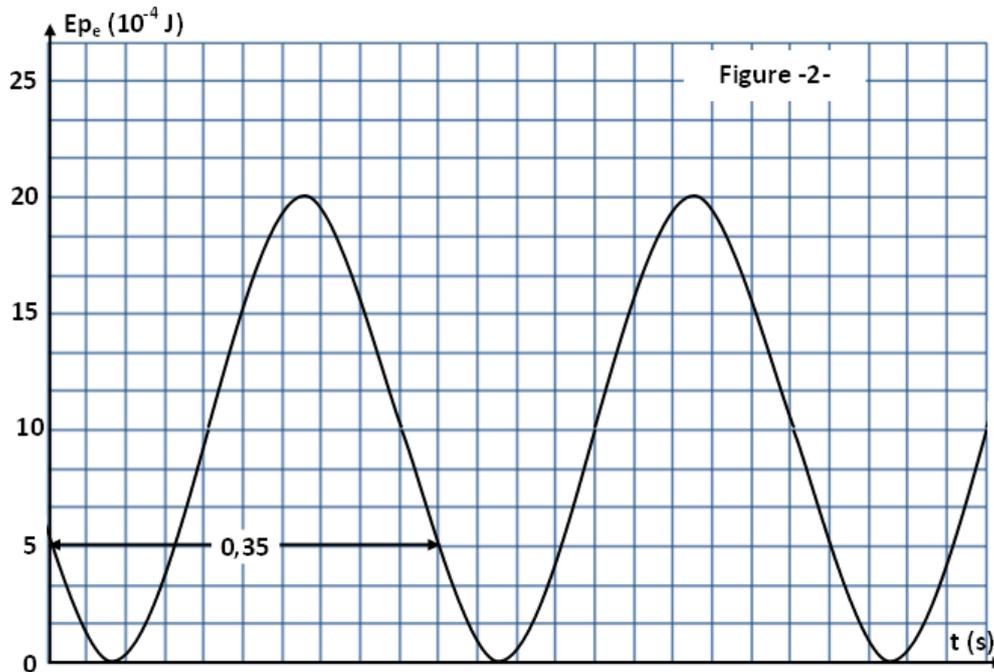
Exercice n° 2 :

Un solide (S) de masse m est soudé à l'extrémité d'un ressort (R) à spires non jointives de raideur k . Il peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Son centre d'inertie G est repéré sur un axe horizontal ($x'Ox$) dont l'origine O correspond à la position de repos de (S).

Le ressort est allongé à une abscisse x_0 et lâché à l'instant t_0 . Un dispositif permet d'enregistrer la variation de l'abscisse x en fonction du temps. L'enregistrement est donné par la figure -1-.

- Déterminer à partir du graphe la période T_0 et la pulsation ω_0 du mouvement.
- Établir l'équation différentielle du mouvement du solide. En déduire une relation entre ω_0 , m et k .
 - Établir l'équation horaire du mouvement de (S).
- Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique du système {(S) ; (R)} en fonction de t .
 - Sachant que cette valeur à l'instant $t = 0 \text{ s}$ est égale à $6,25 \cdot 10^{-4} \text{ J}$,
 - Déterminer la valeur de k .
 - Quelle est donc la valeur de la masse m ?
- On se propose d'augmenter la période propre T_0 de l'oscillateur tout en conservant k et X_m . Pour cela on remplace la masse de solide (S) par $M > m$. On donne la courbe exprimant la variation de l'énergie potentielle élastique du système {(S) ; (R)} en fonction de t par la figure -2-.
 - Déterminer la nouvelle période propre du système oscillateur T_0' .
 - En déduire la masse M .
 - Calculer φ : la phase initiale de l'énergie potentielle élastique.
 - Donner la nouvelle loi horaire du mouvement.
 - Représenter sur la même figure la courbe de l'énergie cinétique du système.

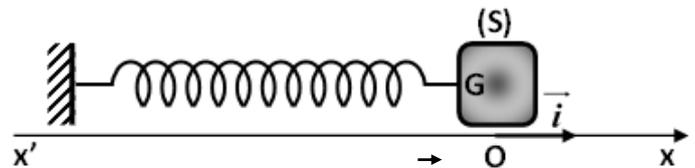




Exercice n° 3 :

On étudie les oscillations mécaniques d'un pendule élastique horizontal en supposant tout type de frottement négligeable.

On désigne par $x(t)$ l'élongation du centre d'inertie G du solide dans le repère (O, \vec{i}) où O est la position de G à l'équilibre.



- 1) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation $x(t)$.
- 2) La solution de cette équation différentielle est : $x(t) = X_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_x)$. En vérifiant cette solution, établir l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres du pendule en fonction de la masse m du solide et de la raideur k du ressort.
- 3) Dans une première expérience et à l'aide d'un système approprié on enregistre pendant une durée $\Delta t = 1,25$ s le mouvement du centre d'inertie G d'un solide (S_1) de masse m_1 . On obtient le diagramme de la figure -1- ci-contre.
 - a) Déduire la période T_0 des oscillations.
 - b) Calculer :
 - i. La phase initiale φ_x du mouvement.
 - ii. La vitesse initiale V_0 à la date $t = 0$ s.
 - c) Sous quelle forme se présente l'énergie mécanique du système {solide + ressort} à la date $t = 0$ s ? Justifier la réponse.
- 4) Dans une deuxième expérience on étudie l'influence de la masse du solide sur la période T_0 des oscillations. Pour différentes valeurs de la masse m on mesure la période T_0 . Cette étude a permis de tracer la courbe de la figure -2- représentant $T_0^2 = f(m)$.

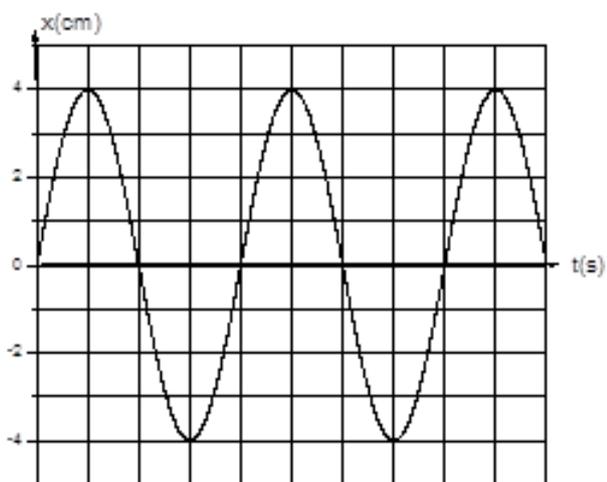
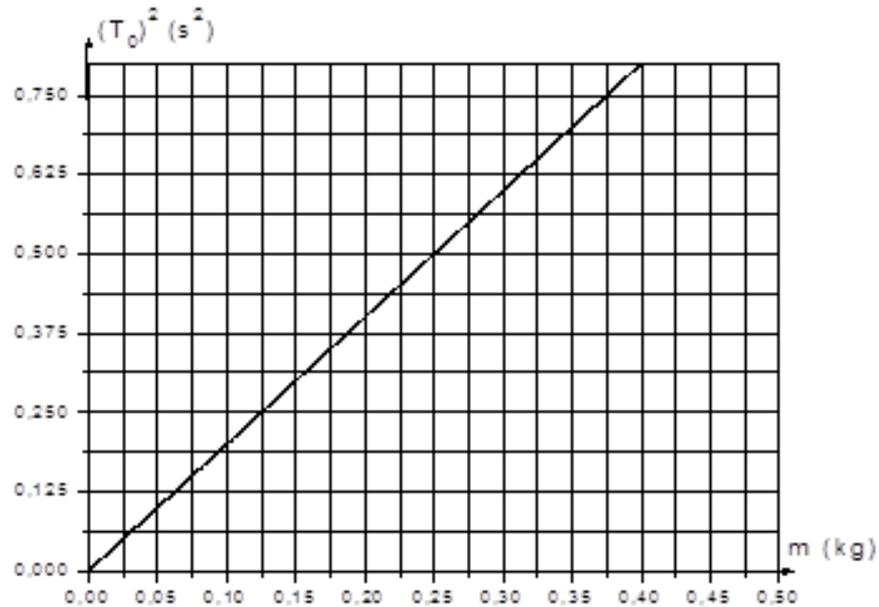


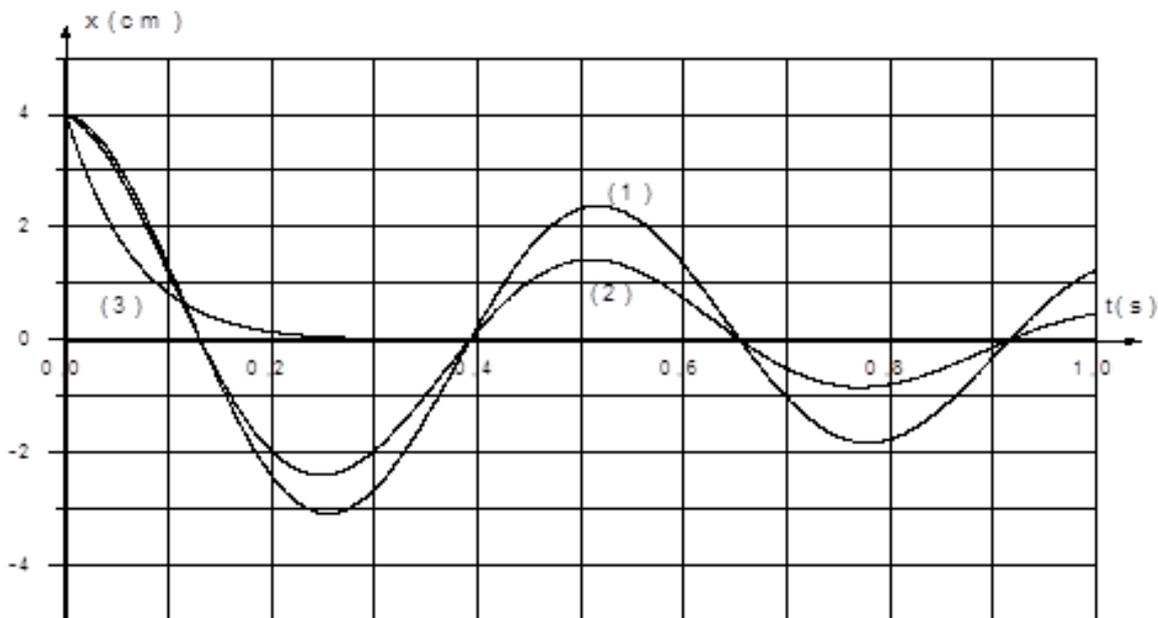
Figure -1-

- Déduire de la courbe de la figure -2- la masse m_1 du solide utilisé lors de la première expérience.
- Calculer la raideur k du ressort.
- Calculer l'énergie mécanique fournie initialement (à $t = 0$) au système $\{(S_1) + \text{ressort}\}$.
- Calculer les abscisses des positions du centre d'inertie G de (S_1) pour lesquelles l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont égales.



- 5) Dans une troisième expérience et à l'aide d'un dispositif d'amortissement approprié on applique sur le solide de masse m_1 une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h \vec{V}$ où h est un coefficient d'amortissement positif et \vec{V} le vecteur vitesse instantanée du solide. Dans ces conditions l'équation différentielle reliant l'élongation $x(t)$ à ses dérivées première et seconde par rapport au temps s'écrit :
- $$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 12 \frac{dx(t)}{dt} + 160 x(t) = 0.$$

- Déduire de cette équation la valeur du coefficient de frottement h .
- Montrer que le système $\{(S_1) + \text{ressort}\}$ n'est pas conservatif.
- Les diagrammes ci-dessous sont des enregistrements de l'évolution temporelle de l'élongation $x(t)$ du centre d'inertie du solide pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement h ($h_a = 1,5 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$; $h_b = 1,8 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $h_c = 3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$).



Attribuer à chacun des enregistrements (1), (2) et (3) le coefficient d'amortissement correspondant parmi les valeurs h_a , h_b et h_c , et préciser pour chacun le nom du régime correspondant.