2014/2015

DEVOIR DE SYNTHÈSE N1

MATHEMATIQUES

2 heures

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{cosx-1}$ admet une limite en 0 égale à :

a) 2 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** -2

2) Soit la fonction f définie sur IR\{−1,1} par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$. Alors sa courbe représentative (C) selon un repère orthonormé du plan admet :

a) trois asymptotes **b)** deux asymptotes **c)** une seule asymptote

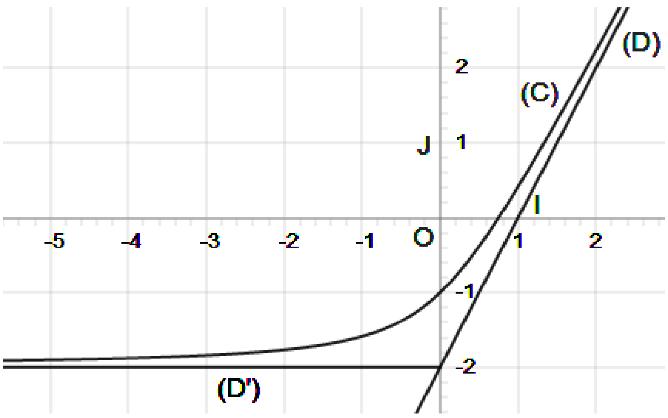
3) Pour tout réel x, l'expression $\cos(x+\frac{7\pi}{2})+\sin(x+3\pi)$ est égale à :

a) 2.sinx **b)** −2sinx **c)** 0

4) Le plan étant orienté dans le sens direct. Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Alors les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont :

a) colinéaires et de même sens **b)** colinéaires et de sens contraires **c)** orthogonaux

EXERCICE 2 : (5 points)



Dans le graphique ci-contre, la courbe (C) représente selon un repère orthonormé (O,I,J) une fonction f **continue sur IR.**

- La droite (D) : y=2x−2 est une asymptote à (C) au voisinage de (+∞).
- La droite (D') : y=−2 est une asymptote à (C) au voisinage de (−∞).

1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)+2-2x}$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur IR.

3) a) Expliquer pourquoi l'équation f(x)=0 admet une unique solution α dans IR.

b) Dresser le tableau de signe de f(x) sur IR.

4) Soit la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \geq 0 \\ g(x) = -f(x) & si \quad x < 0 \end{cases}$

a) Tracer sur votre copie (à rendre) la courbe représentative (Γ) de la fonction g selon un repère orthonormé du plan.

b) Etudier la continuité de g sur IR , puis donner son domaine de continuité D_c.

EXERCICE 3 : (6 points)

I/ Soit la fonction f définie sur IR\{2} par : $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{x-2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1) Vérifier que la courbe (C) admet une asymptote verticale (à droite et à gauche) dont on donnera une équation cartésienne.

2) Montrer que la droite $\Delta : y=2x+1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

II/ On considère la fonction g définie sur IR par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & si \ \ x \leq 0 \\ g(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}+x-1}{x} & si \ \ 0 < x \leq 2 \\ g(x) = 2x - 2 & si \ \ x > 2 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout réel $0 < x \leq 2$ on a : $g(x)=\frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}-x+1}$

b) Etudier la continuité de la fonction g en 0 puis en 2.

2) a) Montrer que la fonction g est continue sur IR\{0}.

b) En déduire que la fonction $h : x \longmapsto |x|.\, g(x)$ est continue sur IR.

EXERCICE 4 : (6 points)

On considère pour tout réel x, l'expression $A(x)=\sqrt{3}.\cos2x-\sin2x-1$

1) Montrer que : $A(x)=2.\cos(2x+\frac{\pi}{6})-1$

2) En remarquant que $2x+\frac{\pi}{6}=2.(x+\frac{\pi}{12})$, déduire que $A(x)=1-4.\sin^2(x+\frac{\pi}{12})$

3) a) Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

b) Vérifier que $A(0)=\sqrt{3}-1$

c) En déduire que : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) Soit l'expression $B(x)=1+\sqrt{3}+A(x)$; $x \in$ IR

a) Montrer que $B(x)=2.\cos x.(\sqrt{3}.\cos x-\sin x)$

b) Quel est alors le signe de B(x) pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$? (Justifier votre réponse).

Formulaire :

$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$

$\sin2a=2\sin a.\cos a$

$\cos2a=\cos^2a-\sin^2a=1-2.\sin^2a=2.\cos^2a-1$