DEVOIR DE SYNTHESE N°1

2014/2015

SAIDANI MOEZ
BAC TEC 3

EXERCICE N °1 ———————————— 3*points*

Indiquer la réponse exacte pour chacune des questions suivantes .

1. La forme exponentielle de $z = -2 - 2i$ est $\begin{cases} 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$.

2. $1 + i\sqrt{3}$ est une racine cubique de $\begin{cases} -8 \\ 8i \\ -8i \end{cases}$.

3. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C dans un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

   (a) Si $z_C = z_A + z_B$ alors $\begin{cases} A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \\ A \text{ est le milieu de } [BC] \\ OACB \text{ est un parallèlogramme} \end{cases}$.

   (b) Si $(z_C - z_A) = 3i(z_B - z_A)$ alors $\begin{cases} A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \\ A, B \text{ et } C \text{ sont situés dans un cercle de diamétre}[AB] \\ \text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A \end{cases}$.

EXERCICE N°2 ———————————— 6*points*

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} + 2$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ interpréter le résultat graphiquement.

2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

   (a) Montrer que $\sqrt{x^2 + 1} > x$ pour tout réel x.

   (b) Dresser le tableau de variation de f.

   (c) Déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1, 0[$.

   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.

5. (a) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{2 - f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et que $f'(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha + 2}$.

   (b) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en α.

EXERCICE N°3 ———————————— 5.5*points*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)z + i = 0$.

2. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : z^2 - (1 + i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0$ (où θ est un réel).

(a) Vérifier que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ).

(b) En déduire l'autre solution z_2 de (E_θ).

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points M_1 est M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

   (a) Vérifier que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur.

   (b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le triangle OM_1M_2 est isocèle et rectangle en O.

EXERCICE N°4 ——— 5.5*points*

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et interpréter le résultat.

   (c) Vérifier que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

   (a) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

   (b) Expliciter $f^{-1}(x)$.

   (c) En utilisant le graphe de f ,représenter la courbe de la fonction f^{-1} (préciser la tangente au point d'abscisse 0) .