Exercice 1:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2cm).
On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2$.
Soit ξ le cercle de centre C et de rayon 2.

1) a) Vérifier que $B \in \xi$.

b) Placer les points A et C. Construire alors le point B.

2) a) Ecrire z_A sous forme exponentielle.

b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

c) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

d) En déduire la forme exponentielle de z_B.

e) Déterminer alors la valeur exacte de $sin\,(\frac{\pi}{12})$.

3) Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tel que : $|z| = |\overline{z} - 1 - i|$.

4) Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -3i(\frac{z-1+i}{z-2})$.

a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel .

b) Montrer que OM'$= 3\frac{AM}{CM}$.

c) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$; le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

Exercice 2:

Soit la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n ∈ IN : $U_n \geq 2$.

b) Montrer que U est décroissante.

c) Déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout n ∈ IN : $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(U_n - 2)$.

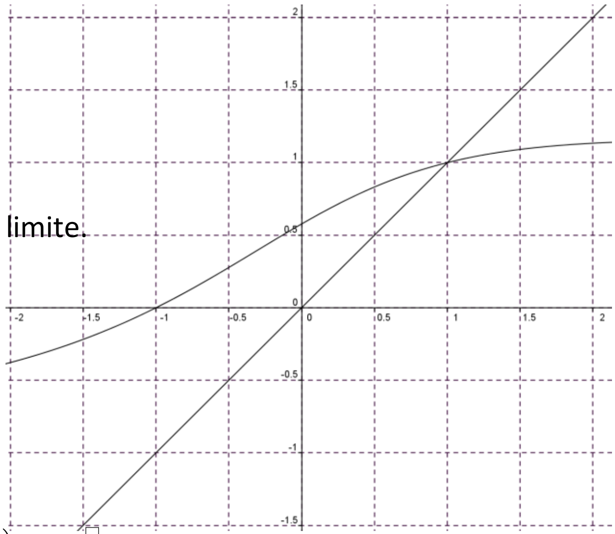
b) Montrer par récurrence que pour tout n ∈ IN: $U_n - 2 \leq (\frac{2}{3})^n$

c) Retrouver la limite de U.

Exercice 3:

Dans la graphe ci-dessous on a représenté la courbe (C)d'une fonction f définie sur [-2 , 2] et la droite D d'équation : y= x

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geq 0$



1/ En utilisant le graphique :

a) Quel est le sens de variation de f ?

b) Déterminer le signe de [f(x)-x] sur [-2,2]

2/a) Montrer par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \leq U_n \leq 1$

c) Vérifier que la suite U est croissante

d) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

3/ On considère la suite $(t_n)_{n>0}$ définie par $t_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} U_k$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$

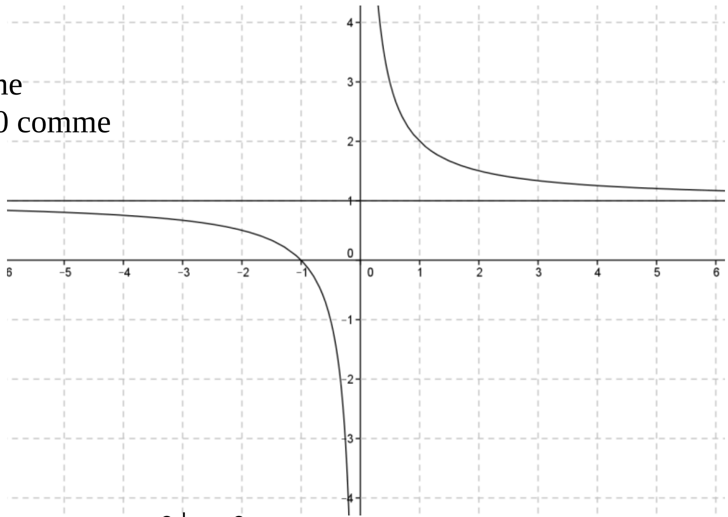
4/ La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}}$

On désigne par V la suite définie par $V_n = \sum_{k=0}^{n}(2U_{k+1} - U_k)\ ;\ n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+1} \geq \frac{1+U_n}{2}$. En déduire que $V_n \geq n+1$

b) Déterminer, alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$

Exercice 4:



La courbe ci-dessus est celle d'une fonction f définie sur IR*, elle admet la droite D: y =1 comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ et D' : x =0 comme asymptote verticale.

1./a.Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty, -\infty$,0^+ et 0^-.

b. Calculer ces limites $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{x}{x^2+1})$, $\lim_{x\to 2^+} f(\frac{x}{\sqrt{x-2}})$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$

2./Soit la fonction définie sur IR par $g(x) = \begin{cases} f(x)\ si \quad x \succ 1 \\ x^3+2x-1 \quad si \quad x \leq 1 \end{cases}$

a. Montrer que g est continue 1.

b. Monter que l'équation g(x) =0 admet dans $]-\infty,1]$ une unique solution α puis vérifier que $0<\alpha<1$.

3)./Déterminer l'image de$]-\infty, 0[$par la fonction composée gof.