

Prof :B.Anis

Classe :

4^{ème} sc-exp₂

Devoir de contrôle n°1

Mathématiques

Durée :2h

EXERCICE N°1(2 pts)

Répondre par vrai ou faux . Aucune justification n'est demandée

- 1) Soit $\theta \in]\pi; 2\pi[$.L'écriture exponentielle du nombre complexe $1+e^{i\theta}$ est :
 $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
- 2) La suite U définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
- 3) Pour tout nombre complexe non nul z on a : $\arg\left(\frac{z^2}{z}\right) \equiv 3\arg(z)[2\pi]$.
- 4) Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $z^2-3z+1=0$ sont conjugués.

EXERCICE N°2(6pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormée direct $(O; \vec{U}; \vec{V})$. On considère les points A,B et C d'affixes respectives : $\mathbf{a=-1+2i}$; $\mathbf{b=-2-i}$ et $\mathbf{C=-3+i}$

- 1)Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{U}; \vec{V})$.
- 2)Calculer $\frac{b}{a}$ en déduire la nature du triangle OAB.
- 3)On considère l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z+1-2i}{z+2+i}$.
 - a)Calculer l'affixe c' du point C'=f(C) .
 - b)Déterminer l'ensemble ζ des points M d'affixes $z \neq b$ tels que $|z'| = 1$
 - c)Justifier que ζ contient les points O et C .Tracer ζ .

EXERCICE N°3(6pts)

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \frac{n}{(n-1)!}$.

(on rappelle que $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$ et $0! = 1$)

- 1)Calculer U_1 et U_2 .

2)a) Vérifier que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$.

c) En déduire que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2)a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} U_2$.

b) En déduire la limite de la suite (U_n) .

3) On pose pour tout $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $0 < S_n \leq 1 + 8 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

EXERCICE N°4(6pts)

Soit la fonction définie sur \mathbb{R}^* par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1)a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{-2}{x} \leq f(x) \leq 0$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{2}$ et déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.

2)a) Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}$.

b) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et déterminer $f(]-\infty; 0[)$

3) Soit g la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par $g(x) = \tan(\pi f(x))$

a) Montrer que g est continue sur $] -\infty; 0[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = -1.5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $] -8; -3[$.

Bon travail

