Prof : CHEKIR Mahmoud Tel : 23746061

Série d'exercices № 1

" Matrice "

économie & Gestion

✓ QCM:

1- l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est :

a) □ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) □ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) □ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

2- le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est :

a) □ 0 b) □ 1 c) □ -1

3- L'inverse de la matrice A=$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ est :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

4- Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est :

a) -3 b) 3 c) 0

5- Le produit de deux matrices d'ordres respectives 2×5 et 5×2 est une matrice :

a) d'ordre 5×2 b) Carrée d'ordre 5 c) Carrée d'ordre 2

6- Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.Alors :

a) A est la matrice unité d'ordre 2 b) L'inverse de A est A c) Det(A) = 1

7- On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 8 & 0 & -4 \\ 4 & -7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) A et une matrice :
'a) d'ordre 3×4 (b) d'ordre 4×3 (c) carrée

2) Pour la matrice A ci-dessus le coefficient a_{23} est
(a) -7 (b) 0 (c) 23

3) La matrice $A\times B$ est d'ordre
(a) 3×4 (b) 3×1 (c) 4×4

4) Soit $C = A\times B$ donc c_{11} est égale à
(a) 19 (b) 10 (c) 8

Exercice 1 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Donner l'ordre de A et celui de B
2) Préciser les valeurs des coefficients a_{21} et a_{32} de la matrice A
3) Calculer $A \times B$ et $A \times B + 2I_3$

Exercice 2 :

On considère la matrice carré M suivante $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1- calculer M^2
2- vérifier que $M^2 = M + 2I_3$,ou I est la matrice unité d'ordre 3.
3- En déduire que la matrice M est inversible et donner l'expression de M

Exercice 3 :

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 3 tel que $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 8 & 9 & -22 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{-9}{2} \\ -6 & -7 & 17 \end{pmatrix}$

1/ calculer le déterminant de la matrice A et en déduire que A est inversible
2/ calculer AxB et déduire la matrice A^{-1}

Exercice 4 :

Compléter les phrases suivantes
1/soient A et B deux matrices d'ordre respective 3x4et 2x3
Alors la matrice BxA est d'ordre ……………………..
2/l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice B=……$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$
3/on a A, B deux matrices d'ordre 4 tel que $A^2+3A = I_4$ alors A^{-1} =……………………………………

Exercice 5 :

On considère les deux matrices carrés suivantes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le terme a_{32} de A et le terme b_{23} de B

2) a) Calculer le déterminant de A en déduire que A est inversible

b) Calculer A.B puis en déduire que $A^{-1} = B$

• Exercice 6 :

Soit $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$ avec a un réel

1) calculer a pour que la matrice A ne soit pas inversible.
2) on suppose a=1 Calculer A^2 et déterminer A^{-1}
3) Résoudre par la méthode matricielle le système : $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

• Exercice 7 :

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de M et déduire que M est inversible

2) Montrer que $M^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) On considère le système linéaire suivant $S:\begin{cases} y+2z=5 \\ -x+3y=2 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$

a) Donner l'écriture matricielle du système S
b) Résoudre alors dans IR^3 le système S

• Exercice 8 :

On considère la matrice carré suivante $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) a) Quelle est l'ordre de M
   b) Déterminer le terme a_{22} de M
2) Calculer le déterminant de M en déduire que M est inversible

3) a) Calculer $A=\frac{1}{2}(M-I_3)$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3
   b) Calculer $A\times M$ en déduire la matrice inverse M^{-1} de M
4) On considère le système linéaire suivant : $(S)\begin{cases} y+z=2 \\ X+z=4 \\ X+y=-2 \end{cases}$
   a) Donner l'écriture matricielle du système (S)
   b) En déduire la solution du système (S)

• Exercice 9 :

1- Soient $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -2\\ 3 & -2 & -\frac{3}{2}\\ -2 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$

a) Calculer $\text{dét}(A)$

b) En déduire que A *est inversible*

2- a) Calculer $A\times B$

b) En déduire A^{-1}

3- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ *le système* $(S):\begin{cases}-x+2y+z=1\\ 2y+3z=-2\\ -2x+y-2z=5\end{cases}$

• Exercice 10 :

1) Soient $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a- Donner l'ordre de la matrice M x N .
b- Calculer : M x N.

2) Soient $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

a- Vérifier que : A x B = $2I_2$, où I_2 la matrice unité .
b- En déduire que A inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.
c- Calculer : $A^2-3A+4I_2$.

3) Soit la matrice : $C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

a- Vérifier que : $C^2=I_2$, où I_2 la matrice unité .
b- La matrice C est-elle inversible ? si oui déterminer sa matrice inverse C^{-1} .

• Exercice 11 :

On considère la matrice carré M suivante $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1- calculer le déterminant de M. en déduire que M est inversible

2- montrer que $M^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3- on considère le système linéaire suivante $S:\begin{cases} y+2z=5 \\ -x+3y=2 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$

a- donner l'écriture matricielle du système S

b- **ré**soudre dans $\mathbb{R}^3$ le système S

• Exercice 12 :

Répondre par « VRAI » ou « FAUX » :

1) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors : La matrice $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2) Les deux matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ commutent $(A\times B=B\times A)$

3) On considère les deux matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Alors : $A\times B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ et la matrice $B\times A$ n'est pas définie.

• Exercice 13 :

1) On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -3 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; où $a\in\mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs de a pour les quelles la matrice A soit inversible.

2) Dans la suite de l'exercice on pose : $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=4A-A^2$

a- Montrer que A est inversible.

b- Calculer : B *et* $A\times B$.

c- En déduire la matrice inverse A^{-1}.

• Exercice 14 :

1) On donne les deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a- Calculer dét(A) et dét(B).
b- En déduire que A est inversible.
c- Calculer : $A \times B$.
d- En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

2) On considère le système : $(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$

a- Ecrire (S) sous forme matricielle.
b- Résoudre alors le système (S).

• Exercice 15 :

1) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a- Montrer que A est inversible.
b- Vérifier que : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$
c- En déduire la matrice inverse A^{-1} de A .

2) On considère le système : $(S) : \begin{cases} y - z = 1 \\ -3x + 4y - 3z = 2 \\ -x + y = 3 \end{cases}$

a- Ecrire le système (S) sous forme matricielle.
b- Résoudre alors le système (S).

• Exercice 16 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de A.
2) a- Calculer la matrice M= (2 I_3 – A) . Où I_3 la matrice unité d'ordre 3.
b- Vérifier que : $A \times M = I_3$.
c- En déduire que A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1} .

3) Soit le système suivant (S) : $\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$

a- Donner l'écriture matricielle du système (S).
b- Résoudre alors le système (S) .