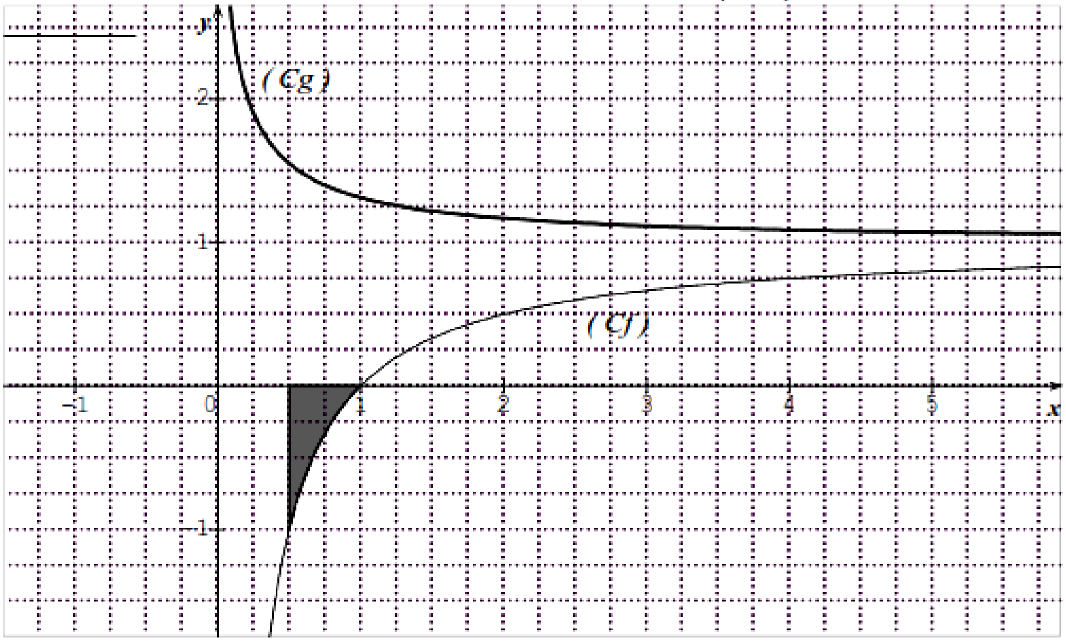
*DEVOIR DE MAISON N ° 3*

*MATHEMATIQUES*

*Prof : Med Khairedine* *Bac sciences*

**Exercice 1 :**

On donne dans la figure suivante les courbes représentatives , dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, des deux fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=1-\frac{1}{x}$ *et* $g(x)=\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$




Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est **vraie** ou **fausse**. Les réponses seront écrites dans la grille fournie dans la feuille **ANNEXE** . Aucune justification n'est demandée .

**1** L'aire de la partie hachurée est $\int_{1/2}^{1} f(x)dx$ .

**2** il existe un réel $c \in \left]\frac{1}{2}\,,\,1\right[$ tel que $g'(c) = 2\ln\left(\frac{e+1}{e+2}\right)$

**3** Les deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f(n)$ et $V_n = g(n)$ , sont adjacentes .

**4** On note $\mathbf{C} = \{M(x,y) \text{ tels que : } 1 \le x \le 2 \text{ et } y = f(x)\}$ l'arc de la courbe de f sur $[1\,,\,2]$ .
Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc **C** autour de $(O,\vec{i})$,est :

$$\pi\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$$

## Exercice 2:

On donne , dans la feuille ANNEXE , ci jointe , ( C ) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction réciproque $f^{-1}$ d'une fonction f continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$ . La courbe ( C ) admet les droites d'équations $y = x$ et $y = 0$ comme asymptotes et coupe l'axe des ordonnées en A( 0 , ln2 ).

1) a – Par lecture graphique déterminer :

$$f^{-1}(0)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)\ \text{et}\ \lim_{y\to+\infty}[y-f(y)]$$

b – En déduire :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)\ \ \text{et}\ \ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

c – Tracer la courbe ( C' ) de $f$ ,dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ que ( C ), sur la feuille ANNEXE

2) En réalité on connait que : $f^{-1}(x) = \ln(e^{ax} + b)$ , où a et b sont deux réels strictement positifs.

a – Vérifier que $f^{-1}(x) = ax + \ln(1 + be^{-ax})$ , pour tout réel $x$ strictement positif .

b – Montrer que : $a = b = 1$ .

c – En déduire que pour tout réel $x$ strictement positif , $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

3) On considère la suite $(I_n)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^n e^{-x}\ln(e^x - 1)\,dx$$

a – Montrer que la suite $(I_n)$ est croissante .

b – A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_1^n xe^{-x}\,dx$ . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ;

$$0 \le I_n \le -(n+1)e^{-n} + \frac{2}{e}$$

c - Montrer que la suite $(I_n)$ est convergente .

4) a – Vérifier que :

$$\forall x \neq 0\ ;\ \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$$

b – Montrer en s'aidant d'une intégration par partie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)\ln(e^n - 1) - n + \left(\frac{1}{e} - 1\right)\ln(e - 1) + 1$$

c – En déduire la limite de $I_n$ , lorsque $n$ tend vers $+\infty$ .

( C ) la courbe représentative de la fonction réciproque $f^{-1}$.

## Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in\,]0,+\infty[$.

   c. Tracer la courbe $\Gamma$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Soit h la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)$.

   a. Montrer que h est une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,+\infty[$.

   b. Montrer que $h^{-1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ $(h^{-1})'(x)=f(x)$.

   c. Pour tout $\lambda \succ \ln(\sqrt{2})$ on désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\Gamma$ et les droites d'équations respectives $x=\ln(\sqrt{2})$, $x=\lambda$ et $y=0$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=\dfrac{\pi}{4}$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $U_n=\displaystyle\int_{\ln(\sqrt{2})}^{1}\frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$.

   a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\geq 0$

   b. Montrer que $(U_n)$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

   c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\leq\dfrac{1}{\sqrt{2^n-1}}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.



## Exercice 4:

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires .

On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle est noire , on la place dans l'urne B ,
- sinon , on l'écarte du jeu .

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B . On considère les événements suivants :

$R_1$ : **« la boule tirée de A est rouge »** $N_1$ : **« la boule tirée de A est noire »**

$R_2$ : **« la boule tirée de B est rouge »** $N_2$ : **« la boule tirée de B est noire »**

1) a) Déterminer les probabilités des événements $R_1$ et $N_1$ .

b) Calculer les probabilités des événements « $R_2$ sachant $R_1$ » et « $R_2$ sachant $N_1$ ».

En déduire que la probabilité de $R_2$ est de $\dfrac{27}{50}$ .

c) Calculer la probabilité de $N_2$ .

2) On répète n fois l'épreuve précédente ( *tirage d'une boule de A , suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus* ) , en supposant les différentes épreuves indépendantes .

Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?