Sujet de révision n°2

Thèmes abordés :

Complexes ; Statistiques ; Géométrie dans l'espace ; Fonction exponentielle ; Equations différentielles

Exercice n°1 :

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a. $|z-2+5i|^2=3$; b. $|z+2-5i|^2=3$; c. $|z-2+5i|=3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AD]$;
c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $5 + 4i$, et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $|z_G-3-2,5i|=\frac{5}{6}$; b. $z_G-(1+i)=\frac{1}{3}(4+3i)$; c. $z_G-(3+2,5i)=\frac{1}{3}(4+3i)$.

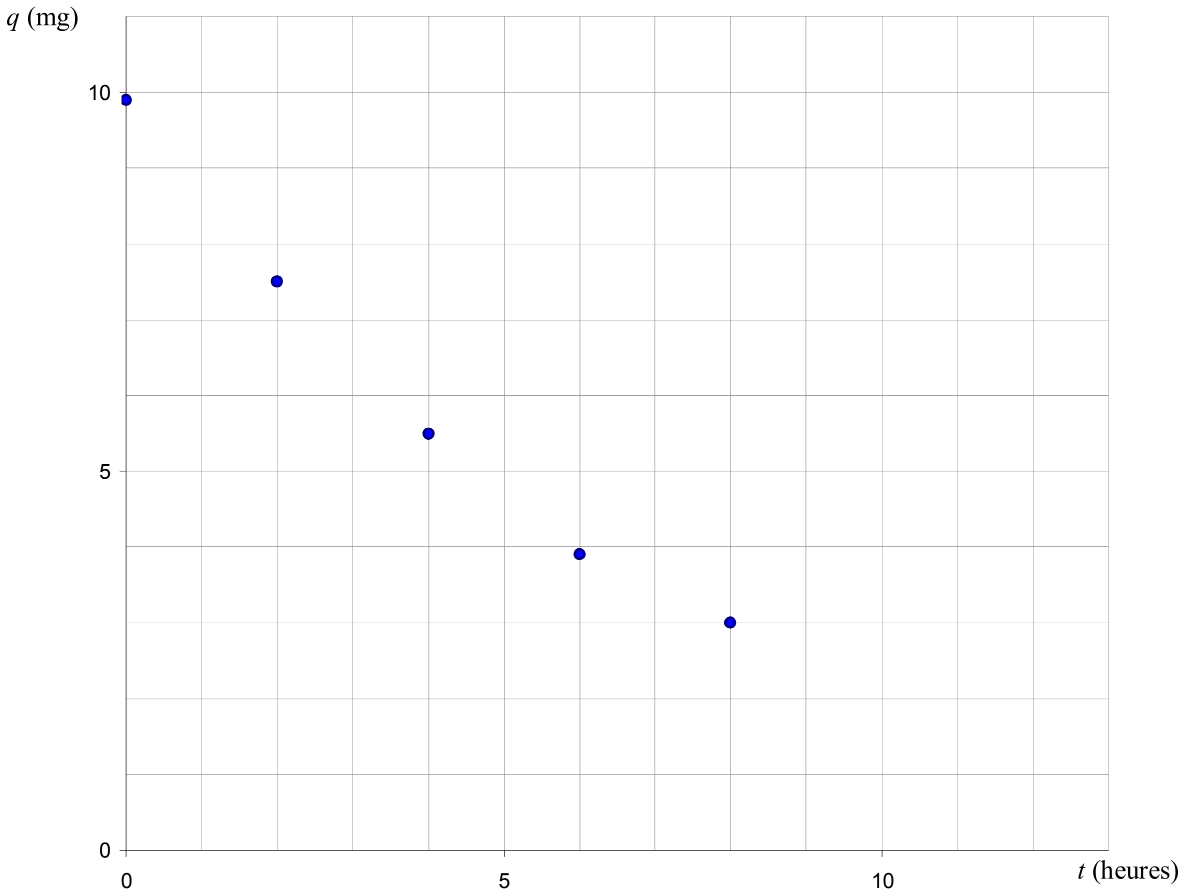
Exercice n°2 :

Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q_i présente dans le sang (q_i en milligrammes) à l'instant t_i (t_i, en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures.

t_i (heures)	0	2	4	6	8
q_i (mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

PARTIE A - Modélisation par une fonction affine

Le nuage de points associé à la série $(t_i\,;\,q_i)$ est représenté dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2}) ; tracer la droite D sur la figure ci-dessus.

2. En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ? Qu'en pensez-vous ?

PARTIE B - Recherche d'un modèle mieux adapté

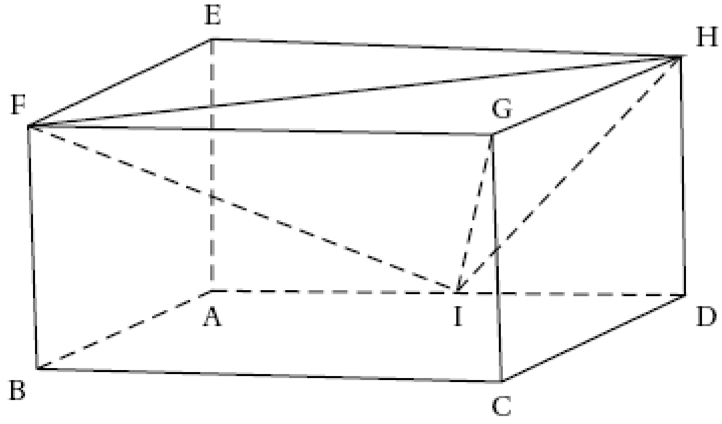
1. On pose $y_i = \ln q_i$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies au centième) :

t_i	0	2	4	6	8
y_i					

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis au centième).
3. Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue à partir de cet ajustement est de la forme $q = a\mathrm{e}^{-bt}$ où a est arrondi à l'unité et b au centième.
4. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur [0 ; 15] par : $f(t) = 10\mathrm{e}^{-0,15t}$.
   Tracer sa courbe représentative C sur la figure de la partie A.
5. On suppose que ce nouveau modèle reste valable pendant 12 heures. Calculer à 10^{-1} près la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.
   Placer le point correspondant sur le graphique.

Exercice n°3 :

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.



On appelle I le milieu de [AD].

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G et H.

2. (a) Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3}$.

   (b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
   En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (2, 1, -1).
   (a) Montrer que $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).
   (b) En déduire une équation du plan (FIH).
   (c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. (a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?
   (b) Donner un systhème d'équations paramétriques de cette droite.
   (c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
   Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ? préciser les éléments caractérisant cette intersection.

Exercice n°4 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $e^x-x>0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

Exercice n°5 :

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur IR, de l'équation différentielle suivante :
(E) : $y'' + y = 0$.

2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur IR*.
On définit la fonction f de IR* dans IR par : $f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$.
Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3. On considère l'équation différentielle (E′) : $y''=-\frac{1}{x^4}y$.
Montrer que la fonction g est solution de (E′), si et seulement si, la fonction f définie pour tout réel non nul x par $f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E).

4. En déduire toutes les solutions de (E′) définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

5. Soit g une solution de l'équation (E′) définie sur $]0, +\infty[$.
(a) Déduire des questions précédentes une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$
(b) Calculer la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$