

**Thèmes abordés :**

Complexes ; Probabilités ; Géométrie dans l'espace ; Fonction exponentielle et lecture graphique.

**Exercice n°1** ©Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $]0, \pi[$ .

1. Résoudre l'équation  $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$ .
2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points A, M et N d'affixes respectives  $-1+i$  ;  $i+e^{i\theta}$  et  $i-e^{i\theta}$  où  $\theta$  est un réel de l'intervalle  $]0, \pi[$ .
  - a) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AN}$  sont orthogonaux.
  - b) Montrer que lorsque  $\theta$  varie dans  $]0, \pi[$ , les points M et N varient sur un cercle ( $\mathcal{C}$ ) que l'on déterminera.
3. a) Déterminer en fonction de  $\theta$  l'aire  $\mathcal{A}(\theta)$  du triangle AMN.  
b) Déterminer la valeur de  $\theta$  pour la quelle l'aire  $\mathcal{A}(\theta)$  est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle ( $\mathcal{C}$ ).

**Exercice n°2** ©

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :  
a. 0,4                      b. 0,75                      c.  $\frac{1}{150}$ .
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :  
a. 0,3                      b. 0,8                      c. 0,4
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :  
a. 1,15                      b. 0,4                      c. 0,3
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :  
a. 0,9                      b. 0,7                      c. 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :  
a.  $\frac{4}{150}$                       b.  $\frac{12}{19}$                       c. 0,3
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :  
a.  $1-(0,25)^{20}$                       b.  $20 \times 0,75$                       c.  $0,75 \times (0,25)^{20}$

### Exercice n°3 ©

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

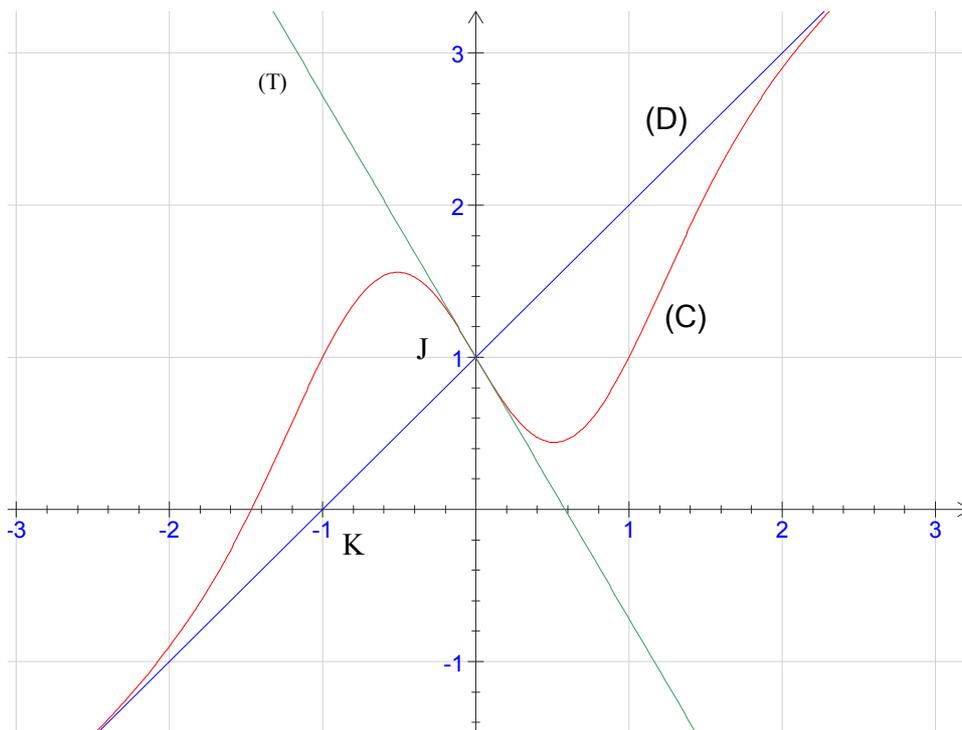
On considère le plan P d'équation  $2x + y - 2z + 4 = 0$  et les points A de coordonnées  $(3, 2, 6)$ , B de coordonnées  $(1, 2, 4)$  et C de coordonnées  $(4, -2, 5)$ .

- Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
  - Vérifier que ce plan est P.
- Montrer que le triangle ABC est rectangle.
  - Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$  passant par O et perpendiculaire au plan P.
  - Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.
  - Calculer le volume du tétraèdre OABC.
- On considère dans cette question le point G barycentre du système de points pondérés  $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ .
  - On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).
  - Déterminer la distance de G au plan P.
- Soit  $\Gamma$  l'ensemble des points M de l'espace vérifiant  $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5$ . Déterminer  $\Gamma$ . Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et  $\Gamma$  ?

### Exercice n°4 ©

Au dessous, figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse O.

On sait que le point  $J(0; 1)$  est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points  $K(-1; 0)$  et J, et que la tangente (T) a pour équation  $y = (1 - e)x + 1$ .



1. Déterminer une équation de (D).
2. On suppose qu'il existe deux réels  $m$  et  $p$  et une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = mx + p + \varphi(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .
  - a) Démontrer que  $m = p = 1$ .
  - b) En utilisant le point  $J$ , montrer que, pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) + f(-x) = 2$ .
  - c) En déduire, après avoir exprimé  $f(x)$  et  $f(-x)$ , que la fonction  $\varphi$  est impaire.
  - d) Déduire de la question b. que  $f'$ , dérivée de  $f$ , est paire.
3. On suppose maintenant que, pour tout réel  $x$ ,  $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.
  - a) En utilisant la parité de  $\varphi$ , démontrer que  $b = 0$ .
  - b) Calculer  $f'(x)$ .
  - c) En utilisant le coefficient directeur de (T), démontrer que  $a = -e$ .
  - d) Démontrer que  $f(x) = x + 1 - xe^{-x^2+1}$ .

**Exercice n°1**

Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $]0, \pi[$ .

1.  $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

$$\Delta' = (-i)^2 - (-1 - e^{2i\theta}) = -1 + 1 + e^{2i\theta} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$$

$$z' = i - e^{i\theta} \text{ et } z' = i + e^{i\theta}$$

2. A, M et N d'affixes respectives  $-1+i$  ;  $i + e^{i\theta}$  et  $i - e^{i\theta}$  où  $\theta$  est un réel de l'intervalle  $]0, \pi[$ .

a)  $z_{\overline{AM}} = z_M - z_A = 1 + e^{i\theta}$  ;  $z_{\overline{AN}} = z_N - z_A = 1 - e^{i\theta}$

$$\overline{AM} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \overline{AN} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta = 1 - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0$$

$\Rightarrow \overline{AM}$  et  $\overline{AN}$  sont orthogonaux.

b) Soit I le point d'affixe i, on a :  $|z_M - z_I| = |e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow M \in \zeta_{(I,1)}$

De même  $|z_N - z_I| = |-e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow N \in \zeta_{(I,1)}$

3. a)  $\mathcal{A}(\theta)$

$$\begin{aligned} &= \frac{AM \times AN}{2} = \frac{\sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \times \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 + 2 \cos \theta} \times \sqrt{2 - 2 \cos \theta}}{2} = \sin \theta \end{aligned}$$

b)  $\mathcal{A}(\theta)$  est maximale lorsque  $\sin \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \in ]0, \pi[$ .

Dans ce cas M(2i) et N(0) = O.

**Remarque :**

$$z_{\overline{AM}} = z_M - z_A = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

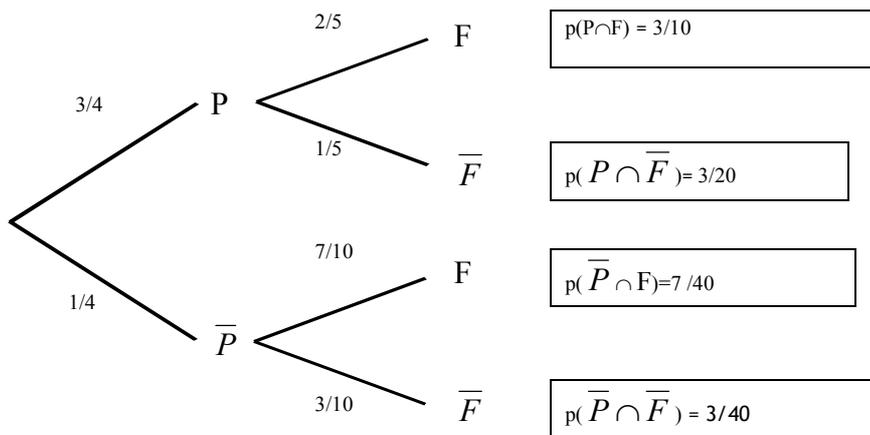
$$z_{\overline{AN}} = z_N - z_A = 1 - e^{i\theta} = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$\Rightarrow \frac{z_{\overline{AN}}}{z_{\overline{AM}}} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  c'est un imaginaire pur  $\Rightarrow \overline{AM}$  et  $\overline{AN}$  sont orthogonaux.

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{AM \times AN}{2} = \frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = \sin \theta$$

### Exercice n°2

On note P l'évènement : « le roman est policier » et F l'évènement : « l'écrivain est français »  
On peut modéliser la situation proposée par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est : **b. 0,75**
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est : **c. 0,4**
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est : **c. 0,3**
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est : **c. 0,475**
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est : **b.  $\frac{12}{19}$**
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est : **a.  $1 - (0,25)^{20}$**

### Exercice n°3

1. a)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$  ne sont pas colinéaires  $\left( \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \right) \Rightarrow A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas}$

alignés  $\Rightarrow A, B \text{ et } C \text{ déterminent un plan.}$

b) On vérifie que les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation  $2x + y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow P = (ABC).$

2. a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 1 + 0 \times (-4) + (-2) \times (-1) = 0 \Rightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en A.}$

b)  $\Delta$  est la perpendiculaire à P passant par O  $\Rightarrow \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  vecteur normal de P est directeur de  $\Delta$

$$\Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur P

$$OK = d(O, P) = \frac{|2 \times 0 + 0 - 2 \times 0 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}$$

$$d) \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{3} \times A(\text{ABC}) \times OK = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times 4}{3 \times 2 \times 3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Autrement : } \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AO}|$$

$$\text{Où } \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{6} |-8 \times (-3) + (-4) \times (-2) + 8 \times (-6)| = \frac{1}{6} \times 16 = \frac{8}{3}$$

3. G barycentre du système de points pondérés  $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$

$$\Leftrightarrow 3\vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \quad (1)$$

a) I est le centre de gravité du triangle ABC  $\Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$

$$\text{En intercalant le point I dans (1), on obtient : } 3\vec{GO} + 3\vec{GI} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GO} + \vec{GI} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$  G est le milieu de [OI]  $\Rightarrow G \in (OI)$ .

b)  $d(G, P) = ?$

$$I \left( \frac{3+1+4}{3}, \frac{2+2-2}{3}, \frac{6+4+5}{3} \right) \Rightarrow I \left( \frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 5 \right)$$

$$\text{G est le milieu de [OI]} \Rightarrow G \left( \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{2} \right)$$

$$\Rightarrow d(G, P) = \frac{|2 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{5}{2} + 4|}{3} = \frac{2}{3}$$

4.  $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5 \Leftrightarrow \|6\vec{MG}\| = 5 \Leftrightarrow GM = \frac{5}{6} \Leftrightarrow M \in S_{\left(G, \frac{5}{6}\right)}$  : la sphère de centre G et de

rayon  $\frac{5}{6}$ .

$d(G, P) = \frac{2}{3} < \frac{5}{6} \Rightarrow \Gamma \cap P$  est un cercle de centre le point H projeté orthogonal de G sur P et de

$$\text{rayon } r = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{1}{2}$$

### Exercice n°4

1. La droite (D) passe par les points  $J(0 ; 1)$  et  $K(-1 ; 0)$ , une équation est donc  $y = x + 1$ .
2. a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$ , c'est-à-dire que la droite d'équation  $y = mx + p$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$ , c'est la droite (D). Donc  $m = p = 1$ .  
b. Le point  $J$  est centre de symétrie de la courbe, on a donc la relation :  
$$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x), \text{ ou encore } f(x) + f(-x) = 2.$$
  
c.  $f(x) = x + 1 + \varphi(x), f(-x) = -x + 1 + \varphi(-x)$  donc  $f(x) + f(-x) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x)$ .  
Or, on sait que  $f(x) + f(-x) = 2$ , on en déduit que  $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ , ou encore que  $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ , c'est-à-dire que la fonction  $\varphi$  est impaire.  
d.  $f(x) + f(-x) = 2$ , donc, en dérivant chaque terme :  $f'(x) - f'(-x) = 0$ , soit  $f'(x) = f'(-x)$ .  
Conclusion :  $f'$  est paire. Attention, la dérivée de  $f(-x)$  est  $-f'(-x)$  (dérivée des fonctions composées).
3. a.  $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2} \Rightarrow \varphi(-x) = (-ax + b)e^{-x^2}$  ; comme  $\varphi$  est impaire, on a  $ax + b = -ax + b$ , soit  $b = 0$ .  
b.  $f(x) = x + 1 + \varphi(x) = x + 1 + axe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \varphi'(x) = 1 + ae^{-x^2} + (ax)(-2x)e^{-x^2} = 1 + a(1 - 2x^2)e^{-x^2}$ .  
c. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, soit  $J$ , est  $f'(0) = (1 - e)$  (équation de (T)). On a donc l'égalité :  $f'(0) = 1 + a = 1 - e \Rightarrow a = -e$ .  
d. Il reste à conclure :  $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2} = x + 1 - exe^{-x^2}$ .