

BAC BLANC – MATHÉMATIQUES

CLASSES : 4sc 1 & 2 – DUREE : 3 HEURES – COEF : 3

Professeurs : Chrih + Ftouech

Le sujet comporte 3 pages numérotées 1/3 à 3/3

EXERCICE 1 (2 points)

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante. Aucune justification n'est demandée
Pour chaque question une seule proposition est exacte, barème proposé 0,5 x4

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}}$ est égale à :

a) 0

b) $-\infty$

c) $+\infty$

2) Le complexe $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine

a) huitième de l'unité

b) sixième de l'unité

c) quatrième de l'unité

3) Soit z et m deux complexes on a : $\overline{iz + (1+i)m}$ est égal à :

a) $-iz + (1-i)m$

b) $-\overline{iz} + (1-i)\overline{m}$

c) $-\overline{iz} + (1-i)m$

4) $\int_{-1}^1 x \ln(1+x^2) dx$ est égale à :

a) $e \ln(1+e^2)$

b) 0

c) 2e

EXERCICE 2 (4,5 points)

Soit p un entier naturel non nul, On pose $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$

1) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}$

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul p, on a : $\frac{2^{p+1}}{e^2(p+1)} \leq I_p \leq \frac{2^{p+1}}{(p+1)}$

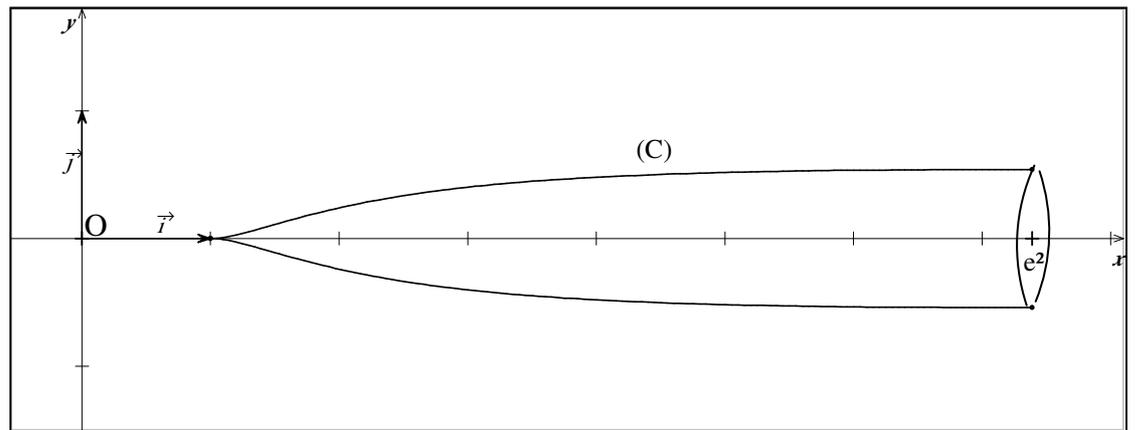
b) En déduire la limite de la suite $(\frac{I_p}{2^{p+1}})$.

3) a) Montrer, en effectuant une intégration par parties, que $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$

b) En déduire successivement les valeurs de I_2 , I_3 et I_4 .

c) On a représenté ci-dessous l'arc (C) de la courbe de la fonction $f: x \rightarrow \frac{(\ln x)^2}{x}$ où $x \in [1, e^2]$

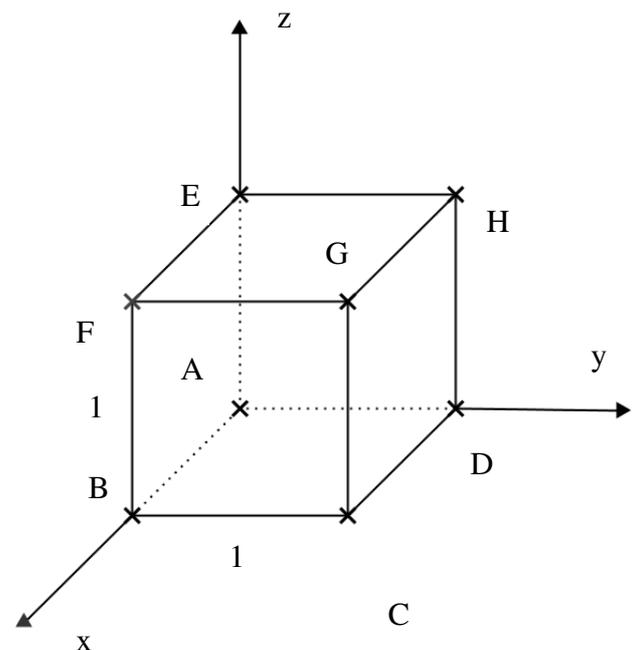
On fait tourner l'arc (C) autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume du solide ainsi engendré.



EXERCICE 3 (4,5 points)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On muni l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

- 1) Déterminer les coordonnées des points F, C et H.
- 2) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH)
- 3) a) Calculer $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$
 - b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $-x + y + z = 0$
 - c) Déterminer les points M de la droite (BH) pour que le volume du tétraèdre ACFM soit égal à $\frac{11}{6}$
- 4) Soit m un réel et S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$



Tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2(1-m)x - 2my - 2mz + 3m^2 - 2m + \frac{2}{3} = 0$

- a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
- b) pour quelles valeurs de m S_m est tangente au plan (ACF) ? Préciser les coordonnées de point de contact.

EXERCICE 4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \ln(1-x^2)$ et (\mathcal{C}) sa courbe dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

[unité graphique 2 cm]

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f.
 - b) Tracer (\mathcal{C}) dans le repère \mathcal{R} (on précisera en particulier la demi-tangente au point O et l'asymptote)
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $]-\infty, 0]$
 - b) Soit (Γ) la courbe représentative dans le repère \mathcal{R} de la fonction réciproque f^{-1} .
Tracer (Γ) dans le repère \mathcal{R} (on précisera en particulier la demi-tangente au point O et l'asymptote)

c) Montrer que pour $x \leq 0$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1-e^x}$

3) a) Soit $F(x) = (x-1) \ln(1-x) + (x+1) \ln(x+1) - 2x$ où $x \in [0,1[$. Montrer que F est une primitive de f .

b) Soit \mathcal{A} l'aire en cm^2 de la partie limitée par (\mathcal{C}) et les droites d'équations : $y = -\ln 2$, $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Hachurer cette partie puis montrer que $\mathcal{A} = [8\ln(1+\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}] \text{ cm}^2$

c) Déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\ln 2}^0 \sqrt{1-e^x} dx$

EXERCICE 5 (4 points)

1) Trouver les solutions de l'équation : $2z^2 - 2(1 - \cos \theta)z + 1 - \cos \theta = 0$; où $\theta \in]0, \pi [$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit les points M , N et P d'affixes respectives $z_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta + i \sin \theta)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta - i \sin \theta)$ et $z_3 = 1 - \cos \theta$

a) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle

b) Placer dans le plan les points M , N et P pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3) a) Calculer $|z_1 - \frac{1}{2}|$ et $|z_2 - \frac{1}{2}|$. En déduire que les points M et N appartiennent à un cercle que l'on précisera

b) Montrer que le quadrilatère $ONPM$ est un losange. Déterminer θ pour que $ONPM$ soit un carré.