

EXERCICE N°1

Le graphique de l'annexe représente une fonction f dérivable sur \mathbb{R} . Le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C_f

T est la tangente au point A enfin C_f possède deux asymptotes horizontales.

1) Par lecture graphique répondre aux questions suivantes :

a) Préciser $f(0)$ et $f'(0)$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Prouver que pour tout réel x : $f(x) + f(-x) = 1$

d) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

2) On suppose que $f(x) = \frac{ae^{2x}}{1+be^{2x}}$. En utilisant 1) montrer que $a = b = 1$

3) a) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

b) Soit Γ la courbe de f^{-1} dans le même repère, tracer sur l'annexe Γ et la tangente T' à Γ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $0,8 < \alpha < 0,9$

b) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$

Montrer que $\mathcal{A} = -[\alpha^2 + \ln(2 - 2\alpha)]$

EXERCICE N°2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_1^e (1 - \ln x)^n dx$

1) Montrer que $u_1 = e - 2$

2) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n$

b) En déduire les valeurs de u_2 et u_3

3) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°3

L'espace \mathcal{E} est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(0, 0, 2\sqrt{2})$; $B(\sqrt{3}, -1, 0)$; $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$ et $D(0, 2, 0)$.

1) Montrer que A, B et C déterminent un plan \mathcal{P} dont une équation cartésienne est : $2\sqrt{2}y - z + 2\sqrt{2} = 0$

2) Soit M un point de $[OA]$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{k}$ où α un réel.

a) Déterminer en fonction de α les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}$.

b) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ la somme des aires des triangles ABM et CDM , montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2\sqrt{2} - \alpha + \sqrt{3\alpha^2 + 3}$

c) Déterminer la valeur de α pour laquelle $\mathcal{A}(\alpha)$ est minimale.

3) On considère l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ de l'espace \mathcal{E} tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}z - 4 = 0$

a) Montrer que l'ensemble S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.

b) Montrer $S \cap \mathcal{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Caractériser ce cercle.

ANNEXE (Feuille à compléter et à rendre)

Nom : Prénom :

EXERCICE N°4

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est correcte. Cocher la.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$ est égale à

- 0 $-\infty$ $+\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ est égale à

- 2 1 $\frac{1}{2}$

3) L'ensemble de définition de f définie par $f(x) = \ln[\ln(-\frac{1}{x})]$ est

- $] -1, 0 [$ $] -\infty, 0 [$ $] -\infty, 0 [-\{-1\}$

4) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe

(C) d'équation $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ constitué des points de (C) d'abscisses comprises entre 1 et e.

Le solide ainsi engendré a pour volume

- π $\frac{\pi e}{3}$ $\frac{\pi}{3}$

5) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3. La suite (e^{u_n}) est une suite

- Arithmétique de raison e^3 géométrique de raison 3 géométrique de raison e^3

6) ABCD est un tétraèdre **régulier** d'arrête a. Le réel $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ vaut

- a^2 $\frac{1}{2} a^2$ $-\frac{1}{2} a^2$

