Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 3	Durée : 2 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 25-04-2011	Classe : 4SC3

Exercice n°1 :(14 points)

1ière partie :(7points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n ln(x+1)$. (C_n) est la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On pose $\forall\, x \in\,]-1,+\infty[$, $\varphi_n(x) = n\, ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$
   a) Montrer que φ_n est croissante sur $]-1,+\infty[$.
   b) Calculer $\varphi_n(0)$ et déduire le signe de $\varphi_n(x)$.
   c) Soit ≥ 2 . Discuter , suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .
2) a) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, $f_n(x) = 1$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique $\alpha_n > 1$.
   b) Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente .
3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)\, u_n = ln(2) - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\, dx$.
   b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n+2} \leq (n+1)u_n - ln2 \leq -\frac{1}{2(n+2)}$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, u_n$.

2ième partie :(7 points)

Soit les fonctions f_1 et f_2 définies sur$]-1,+\infty[$ par $f_1(x) = x\, ln(x+1)$ et $f_2(x) = x^2 ln(x+1)$. Dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, soit (C_1) la courbe de f_1 et(C_2) la courbe de f_2 .

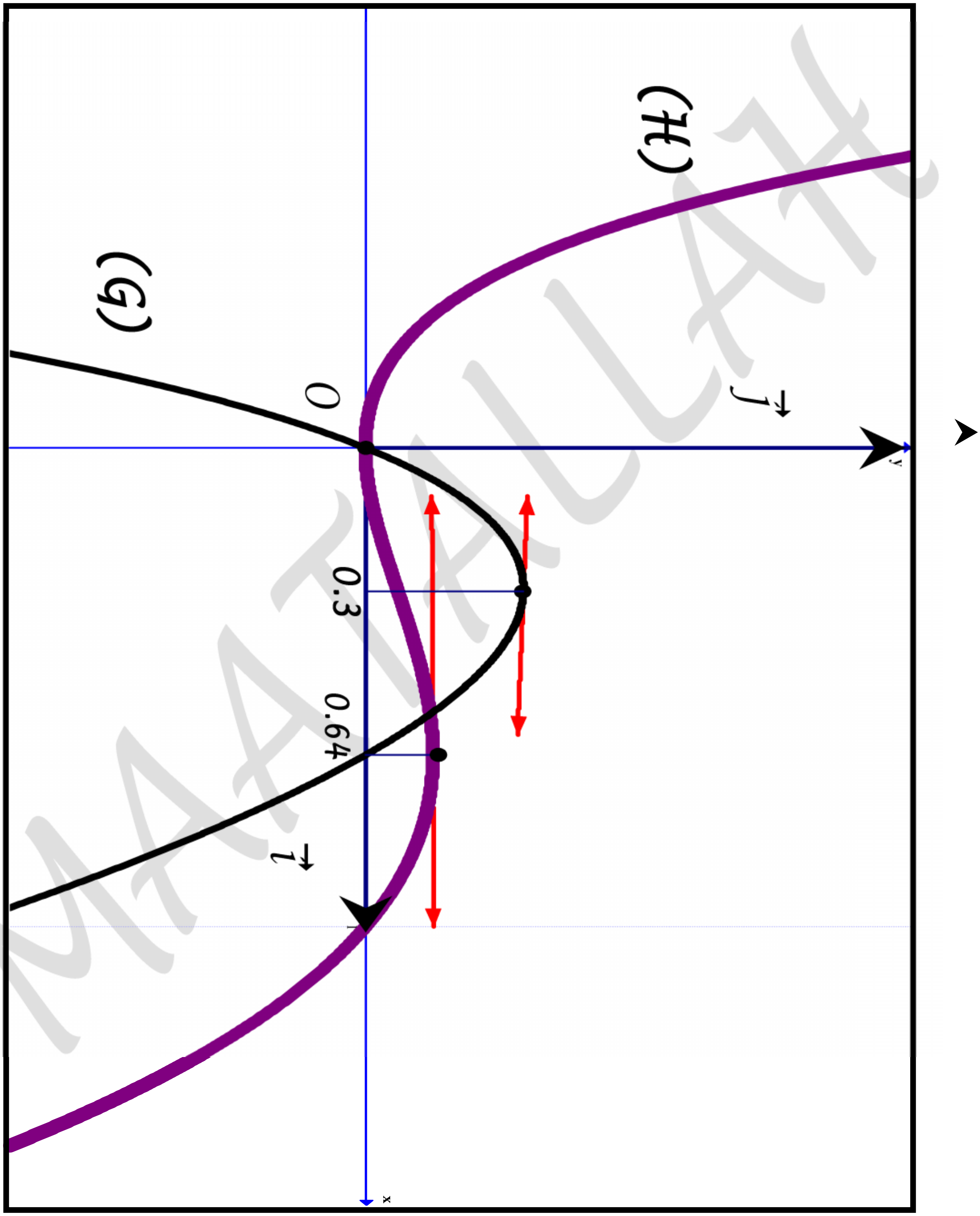
1) a) Etudier les variations de f_1 et f_2 puis la position de (C_1) et (C_2) et les Construire .
   b) Calculer $I = \int_0^1 f_1(x)dx$ et $J = \int_0^1 f_2(x)dx$. Déduire l'aire de la partie du plan limitée par (C_1) et (C_2) .
3) Soit $\forall\, x > -1$, $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$. On a représenté , dans l'annexe et dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes de h et de sa dérivée h' .
   a) Reconnaitre la courbe de h . Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de h' , $(O, \vec{\imath})$ et les droites : $x = 0$ et $= 1$.
   b) Soit M et N deux points respectivement de (C_1) et (C_2) de même abscisse $x \in [0,1]$. Calculer la valeur maximale de la distance N .

Exercice n°2 :(6points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé , on considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,0\,,1)$ et $C(0\,,1\,,1)$ et l'ensemble $S\ = \{\, M(x,y,z) \in \xi\ /\ x^2 + y^2 + z^2\ - 2x - 2y - 2z\ +\ 2 =\ 0\,\}$.

1) Montrer que S est une sphère . Préciser son centre I et son rayon R .
2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Déduire une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$.
   b) Montrer que O , A , B et C forment un tétraèdre puis calculer son volume .
   c) Montrer que P et S se coupent selon un cercle dont on précisera le centre H et le rayon r .
3) Soit Q le plan d'équation : $x - y + \sqrt{2}\ z\ +\ 2\ -\ \sqrt{2}\ =\ 0$.
   b) Montrer que Q est tangent à S en un point J qu'on déterminera .
   c) Donner une équation du plan Q' tangent à S et strictement parallèle à .
4) a) Montrer que les plans médiateurs de $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ se rencontrent au point $E(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2})$.
   b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S' circonscrite au tétraèdre $OABC$.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et la bonne présentation


(G)
(ℋ)
O
0.3
0.64