L-S-Ibn khaldoun Prof : A - khaled	Devoir de contrôle n°3 Mathématiques	Classe :4 sc2 Durée :2h

EXERCICE N °1(6pts)

Dans l'espace munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(1, 0, -1)$; $B(0,1, -2)$ et $C(1, 1,-1)$

1/ a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P=(ABC) est $P : x - z - 2 = 0$

2/ Calculer l'aire du tringle ABC et le volume du tétraèdre OABC

3/ Soit $S_m = \left\{ M(x, y, z) \text{ de l'espace } / \ x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 2mz + m = 0 \right\}$

a) Montrer que pout tout réel m ,S_m est une sphère dont on précisera son centre I_m et le rayon R_m

b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR

c) Etudier suivant les valeurs de m les positions relatives de S_m et P

4/ Caractériser $S_1 \cap P$

EXERCICE N°2 (5pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{x})$ et soi C sa courbe Représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + \ln(1 + e^{x})$. En déduire que la droite $D : y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$

c) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-x})$. En déduire que la droite $D' : y = 2x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

2/ a) Montrer que est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Expliter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

c) En déduire la solution de l'éqution $f(x) = 0$

3/ Tracer C et $C_{f^{-1}}$ dans le meme repère

EXERCICE N°3(5pts)

On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}\, dx$ et pour tout n de IN* :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}\, dx$$

1°/ Calculer I_0 et I_1

2°/ a) Montrer , à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de IN* on a :

$$2\, I_{n+1} = (n+1)\, I_n - e^{-2}$$

b) En déduire I_2

c) On pose $J = \int_0^1 (5x^2 + x - 3)e^{-2x}\, dx$. Donner la valeur de J

3°/ a) Montrer que pour tout x de [0,1]et pour tout n de IN* On a :

$$0 \le x^n e^{-2x} \le x^n$$

b) En déduire que pour tout n de IN* on a : $0 \le I_n \le \frac{1}{1+n}$

c) Déterminer la limite de I_n

EXERCICE N°4(4pts)

Soit F la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$ par : $F(x) = \int_1^{tg^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)}$

1/ Montrer que F est paire

2/ Calculer $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

3/ a) Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et Calculer $F'(x)$

b) En déduire que $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

c) Expliciter $F(x)$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

4/ Calculer l'intégrale $A = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)}$