Lycées Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** Mathématiques	Classe : 4 ème Sc exp$_1$
Date : 28 /04 / 2011	Prof : Meddeb Tarak	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par **Vraie** ou **Faux** sans justification.

P$_1$: La fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est définie sur $]0,+\infty[$.

P$_2$: La fonction $x \mapsto x\ln\left(\frac{x}{e}\right)$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.

P$_3$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}=\frac{3}{2}$.

P$_4$: La valeur moyenne sur $[-1,1]$ de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}}$ est égale à 0.

Exercice n°2 : (7 pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$ et $B(0,1,1)$.

1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.
   $b/$ En déduire que les points O, A et B déterminent un plan P dont on donnera une équation cartésienne.
   $c/$ Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et passant par A. Montrer que B appartient à $\mathscr{C}$.
   $d/$ Soit G le point de coordonnées $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. Montrer que G appartient à $\mathscr{C}$.

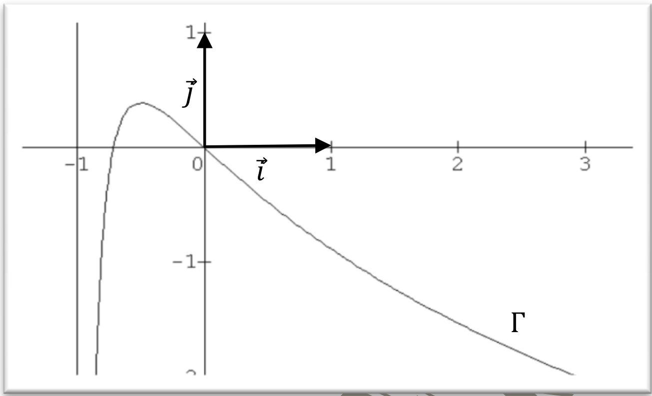
2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, $\alpha \in IR$.

   Vérifier que Δ est l'axe de $\mathscr{C}$.

3) Pour tout réel m, on considère l'ensemble S_m des points $M(x,y\,z)$ tels que :
   $$x^2+y^2+z^2-2mx+2my-2mz-2=0.$$
   $a/$ Montrer que, pour tout $m\in IR$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m .
   $b/$ Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR.
   $c/$ Vérifier que, pour tout $m\in IR$, $A\in S_m$.
   $d/$ Déterminer l'intersection de S_m et le plan P.

4) Soit Q le plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-4\sqrt{3}=0$.
   $a/$ Vérifier que Q est perpendiculaire à P.
   $b/$ Montrer que $S_{\sqrt{2}}$ est tangente à Q.
   $c/$ On désigne par H le point de contact de $S_{\sqrt{2}}$ et Q. Calculer la distance OH.

Exercice n°3 : *(10 pts)*



A- Soit la fonction φ définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1).$$

La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique de φ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etablir le tableau de variations de φ.

2) On désigne par α l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe $(O,\vec{i})$ autre que l'origine du repère.

Utiliser la courbe Γ pour déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

B- Soif f la fonction définie sur $D =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) $a/$ Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

$b/$ Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

2) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^3}$ pour tout $x \in D$.

3) On considère l'intégrale : $I = \displaystyle\int_\alpha^0 \varphi(x)dx$.

$a/$ Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

$b/$ En remarquant que : $\varphi(x) = x^3 f'(x)$, montrer, en utilisant une intégration par parties que : $I = \dfrac{-\alpha^2}{2(\alpha+1)} - 3\displaystyle\int_\alpha^0 \ln(x+1)dx$.

$c/$ Vérifier que la fonction : $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto \ln(x+1)$.

$d/$ Montrer alors que : $\displaystyle\int_\alpha^0 \ln(x+1)dx = \frac{\alpha}{2}$, puis que : $I = \dfrac{-4\alpha^2 - 3\alpha}{2(\alpha+1)}$.

4) $a/$ Etablir le tableau de variations de f.

$b/$ Montrer que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. Puis donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant $\alpha \simeq -0,7$.

$c/$ Tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{u},\vec{v})$.