

<i>L.S.Menzel Hayat</i>	<b>Devoir de Synthèse 2</b>	<i>Afli Ahmed</i>
<i>05 Mars 2013</i>	<i>Durée :3h</i>	<i>4sc.exp</i>

**EXERCICE 1:** (Répondre dans l'annexe page 3)

**A. Choisir la réponse juste**

1. / Soit la fonction f définie par  $f(x) = \ln(\ln x)$ . alors le domaine de définition de f est :

E= ]0 ; +∞[

E= ]1 ; +∞[

E= ]e ; +∞[

2. / Soit  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$  . On a :

f est paire

f est impaire

f ni paire ni impaire

**B. Répondre par Vrai ou Faux**

1. / Soit la droite  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$  et P :  $x + y + z = 0$  . Alors  $\Delta \subset P$

2. / La fonction dérivée sur ]0 ; +∞[ de la fonction :  $x \rightarrow \ln(\sqrt{2x})$  est la fonction :  $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}}$

**EXERCICE 2:** (6pts)

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$  .

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a-/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b-/ Préciser les branches infinies de (C).

c-/ Tracer la courbe (C).

2) Soit F la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  par  $F(x) = \int_1^{1+\tan x} \frac{1}{t^2-2t+2} dt$ .

a. Montrer que F est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et que  $F'(x) = 1$

b. En déduire que  $F(x) = x$  pour tout x de  $[0, \frac{\pi}{2}[$

c. Déduire que  $\int_1^2 \frac{1}{t^2-2t+2} dt = \frac{\pi}{4}$

3./a. Montrer que  $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln(2) - 2 \int_1^2 \frac{x^2-x}{x^2-2x+2} dx$

b. Vérifier que pour tout réel x ,  $\frac{x^2-x}{x^2-2x+2} = 1 + \frac{x-1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-2x+2}$

c-/ Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

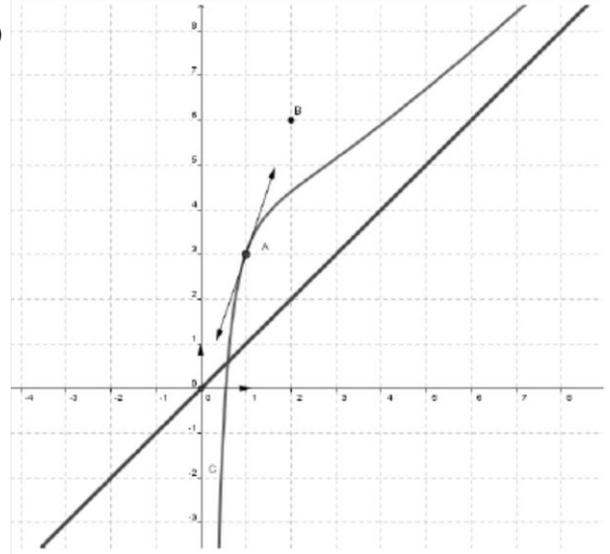
d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$

### **EXERCICE 3 :** ( 6 points )

La courbe ( C ) ci-contre représente une fonction f dérivable sur  $]0;+\infty[$  .

Les droites d'équations :  $x = 0$  et D :  $y = x$  sont des asymptotes à cette courbe.

La tangente à ( C ) au point A(1,3) passe par le point B(2,6)



1) En utilisant le graphique, déterminer :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b.  $f(1)$  et  $f'(1)$

c. Le tableau de variation de f.

2) On admet que  $f(x) = x + \frac{a}{x} + b \frac{\ln x}{x}$

où a et b sont deux réels à déterminer plus tard.

a. Exprimer  $f'(x)$  en fonction de a et b.

c. Utiliser la question 1./ et Montrer que  $a = 2$  et  $b = 2$

3) a. Montrer que  $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$

b. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ( C ), la droite D et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = e$  .

4) a. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à préciser.

b. Construire ( C' ), courbe représentative de  $f^{-1}$   **dans l'annexe joint.**

5) a. Construire sur le graphique contenant ( C ) et ( C' ) la droite  $\Delta: y = -x + 4$  .

b. Hachurer le domaine limité par ( C ), ( C' ) et  $\Delta$  puis calculer son aire. (vérifier d'abord que ( C ) coupe D au point d'abscisse  $\frac{1}{e}$  )

### **EXERCICE 4 :** (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. / Soit l'ensemble  $S = \{M(x,y,z) / x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z - 3 = 0\}$

Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon R et les coordonnées du centre I

2. / a- Vérifier que  $A(-3,1,1)$  est un point de S

b- Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à S en A

3. / Soit Q le plan médiateur du segment [AI] et K le milieu de [AI]

a- Déterminer une équation cartésienne de Q

b- Montrer que l'intersection du plan Q et de la sphère S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

c- Déterminer une équation cartésienne de la sphère S' tangente à P et Q respectivement en A et K

4. / Soit R le plan d'équation :  $2x + y - z - \frac{13}{2} = 0$

Montrer que l'intersection de R et de la sphère S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

# Annexe à remplir et à rendre avec la copie

Nom et prénom : .....

## EXERCICE 1:

A. Choisir la réponse juste

1./ Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(\ln x)$ . alors le domaine de définition de  $f$  est :

$E = ]0 ; +\infty[$         $E = ]1 ; +\infty[$         $E = ]e ; +\infty[$

2./ Soit  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ . On a :

$f$  est paire        $f$  est impaire        $f$  ni paire ni impaire

B. Répondre par Vrai ou Faux

1. Soit la droite  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $P: x + y + z = 0$ . Alors  $\Delta \subset P$

2. La fonction dérivée sur  $]0 ; +\infty[$  de la fonction  $: x \rightarrow \ln(\sqrt{2x})$  est la fonction  $: x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$

## EXERCICE 3:

