

**Exercice 1:**

Soit U la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = \sqrt{\frac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq 1$  .  
b. Etudier la monotonie de U, en déduire qu'elle est convergente.
2. a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}(1 - U_n)$   
b. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 - \left(\frac{2}{2+\sqrt{2}}\right)^n \leq U_n < 1$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
3. Soit V la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = \frac{1-U_n^2}{3+U_n^2}$ 
  - a. Montrer que V est une suite géométrique.
  - b. Exprimer  $V_n$  en fonction de n, en déduire  $U_n$  en fonction de n.

**Exercice 2 :**

Soient  $\mathcal{P}$  le plan rapporté à un R.O.N directe  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et f l'application de  $\mathcal{P}/\{O\}$  dans  $\mathcal{P}$  qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{z^2-4}{2z}$

1. a. Mq : si  $(z \neq 2i)$  alors on a l'égalité  $\frac{z'+2i}{z'-2i} = \left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2$  .  
b. On désigne par A et B les points d'affixes  $2i$  et  $-2i$ .  
Justifier que  $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})(2\pi)$  et que  $\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2$   
En déduire l'ensemble des points M pour lesquels  $z'$  est un imaginaire pure.
2. Soit I le point d'affixe  $z_0 = -4 + 2i$ 
  - a. Déterminer  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$  et  $\frac{IA}{IB}$ .
  - b. Déterminer et construire l'ensemble  $E = \{ M(z) \in \mathcal{P} \text{ tel que } |z+2i|=2|z-2i| \}$
  - c. En utilisant les questions précédentes, construire l'image I' de I par f.
3. Soit  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ 
  - a. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z' = 2i \sin \theta$  .  
On notera  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de (E) avec  $\text{Re}(z_1) > 0$ .
  - b. Ecrire sous forme exponentielle  $z_1$  et  $z_2$  affixes respectives des points  $M_1$  et  $M_2$ . Vérifier que  $z_2 = -\bar{z}_1$
  - c. Montrer alors que  $BM_1M_2$  est un triangle isocèle de sommet principal B.
4. On pose  $Z = i \left(\frac{z'+2i}{z'-2i}\right)$  et  $z' = 2e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ 
  - a. Exprimer Z en fonction de  $\theta$
  - b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \sum_{k=0}^n Z^k$ , discuter suivant les valeurs de  $\theta$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$