

| | | |
|-----------------------------|--|----------------------------------|
| Lycées Tahar Sfar Mahdia | Devoir de contrôle n° 2 Mathématiques | Niveau : 4 ^{ème} Sc exp |
| Date : 12 / 02 / 2011 | Profs : M ^{me} Turki et M ^{rs} Hamza et Meddeb | Durée : 2 heures |

Exercice n°1 : (7 pts)

- I. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\varphi(x) = x^3 + 3x + 4$.
- 1) Etudier le sens de variation de φ .
 - 2) Calculer $\varphi(-1)$, en déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $\varphi(x)$.
- II. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$.
- On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 1) Montrer que, pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{x \cdot \varphi(x)}{(x^2 + 1)^2}$.
 - 2) Etablir le tableau de variations de f .
 - 3) a/ Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote de \mathcal{C} .
b/ Etudier la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .
 - 4) Tracer \mathcal{C} et Δ . (on précisera l'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses).
 - 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
a/ Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.
b/ On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g .
Tracer \mathcal{C}' la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice n°2 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan^2(x)$.

- 1) a/ Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, +\infty[$.
b/ On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f .
Calculer : $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$.
- 2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$.
- 3) On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
a/ Calculer $g(1)$.
b/ Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $g'(x) = 0$.
c/ En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice n°3 : (8 pts)

Soit le cube $OABCDEFG$ représenté par la figure ci-dessous.

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD})$.

Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

L, M et K sont les points définis par :

$$\vec{OM} = \alpha \vec{OA}, \vec{OL} = \alpha \vec{OC} \text{ et } \vec{BK} = \alpha \vec{BF}.$$

1) a/ Déterminer les composantes du vecteur $\vec{u} = \vec{DM} \wedge \vec{DL}$.

b/ En déduire, en fonction de α , l'aire du triangle DML

c/ Calculer, en fonction de α , le volume du tétraèdre $DMLK$.

d/ Calculer le volume du tétraèdre $ACDF$.

2) a/ Démontrer que la droite (OK) est perpendiculaire au plan (DML) .

b/ La droite (OK) coupe le plan (DML) en H .

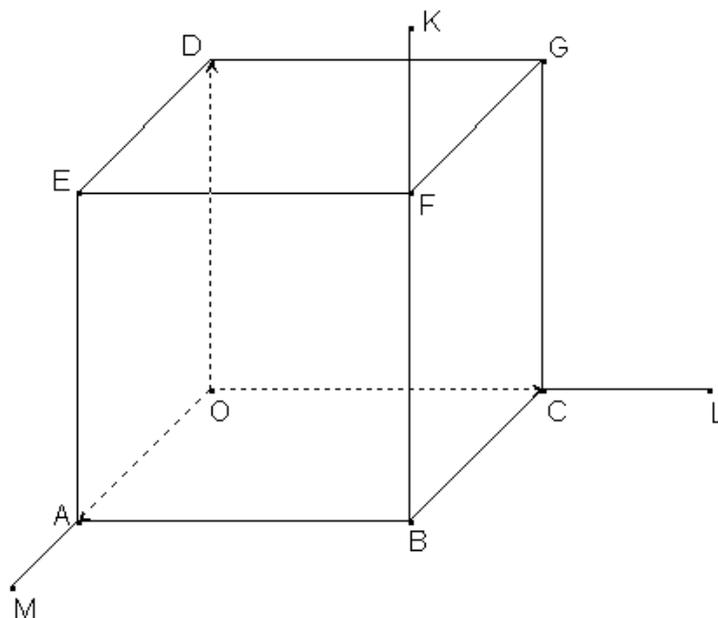
Démontrer que $\vec{OM} \cdot \vec{OK} = \vec{OH} \cdot \vec{OK}$.

c/ Les vecteurs \vec{OH} et \vec{OK} étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\vec{OH} = \lambda \vec{OK}$.

Montrer que $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2}$.

d/ Démontrer que $\vec{HK} = (1 - \lambda) \vec{OK}$, en déduire que $HK = \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\sqrt{\alpha^2 + 2}}$.

e/ Retrouver alors le volume du tétraèdre $DMLK$.



Bonne chance

MEDDEB TARRAK