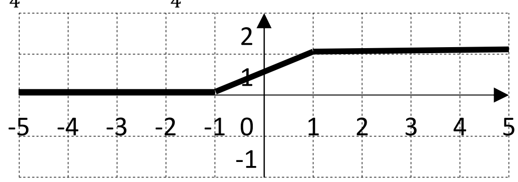
Exercice n° 1 : QCM : Choisir la réponse exacte :

1. La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = e^{2x} - 3$ est une solution de l'équation différentielle :
   a) $y' = 2y + 6$. b) $y' = 2y - 6$. c) $y' = -2y + 6$.
2. La durée de vie X, exprimée en années, d'un robot suit une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$.
   On sait que $p(X > 10) = 0{,}286$. Alors : a) $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}125$ b) $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}225$ c) $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}325$.
3. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{4}$.
   La probabilité de l'évènement $x \leq 0$ est : a) $(\frac{3}{4})^4$. b) $C_4^3\ \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^3$. c) $(\frac{1}{4})^4$.
4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi continue dont la courbe de sa fonction de répartition est ci-contre :



A. La fonction densité f(x) de X est :a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) e^{-2x}.

B. $P(X \leq \frac{3}{4})$ est égale à :a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{8}$.

Exercice n° 2 : Sur un parcours donné, la consommation Y d'une voiture est donnée en fonction de sa vitesse X par le tableau suivant :

X (km/heure)	80	90	100	110	120
Y (litres / 100km)	4	4,8	6,3	8	10

1. a- Représenter le nuage de points $M_i\ (x_i\ , y_i)$ associé à cette série statistique.
   Unité : On prendra 2 cm pour 10 (km/h) et 1cm pour 1 litre.
   b- Déterminer le point moyen G et le placer sur le repère.
2. Calculer cov (X, Y), interpréter.
3. a- Montrer que la droite D de régression de Y en X est D : Y = 0, 152 X – 8, 58.
   b- Estimer la consommation au 100 km (arrondi à 10^{-1}) de la voiture pour une vitesse de 130 km/h.
4. On pose Z = ln Y et on suppose que Z = 0, 0234 X – 0, 5080.
   a- Ecrire Y sous la forme $Y = A\ e^{BX}$ (Donner A et B arrondis à 10^{-4}).
   b- Estimer la consommation au 100 km (arrondi à 10^{-1}) de la voiture pour une vitesse de 130 km/h.

Exercice n°3: On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces portent les numéros –1, 0, 0, 1, 1, 2.

I. On lance le dé deux fois de suite. On désigne par a et b les numéros apparus lors du 1 er et du 2ème lancers.
   1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
      A : « Obtenir une somme (a+ b) nulle ».
      B : « Obtenir un produit ab non nul ».
      C : « a et b sont distincts ».
   2. Sachant que le produit des numéros apparus est non nul, quelle est la probabilité pour que leur somme soit nulle.

II. Soit un entier naturel $n \geq 2$. On lance le dé n fois de suite et on désigne par X le nombre de fois où le numéro 1 est apparu au bout de ces n lancers.
   1. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n de l'évènement (X = 2).
   2. Soit q_n la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$.
      a- Calculer q_n en fonction de n et $\lim_{n \mapsto +\infty} q_n$.
      b- Quel est le nombre minimum de lancers qu'il faut pour que l'on ait $q_n \geq 0{,}99$?

Suite au verso

Exercice n°04 : Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second. La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second. On note :

- D l'évènement « le composant est défectueux » ;
- F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur ».
- F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.

   b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.

   c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$, avec $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$.

   a. Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer $\boldsymbol{\lambda}$. Pour les questions suivantes, on prendra $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}225$.

   b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ?

   c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans?

   d. Définir et tracer la fonction de répartition F de X.

Exercice n°05: On considère l'équation différentielle E_1 : $y'' + y' = e^{-x}$.

1. En posant $z = y'$, montrer que z est solution de l'équation différentielle E_2 : $z' + z = e^{-x}$.
2. a- Déterminer le réel a pour que la fonction $g(x) = a\,x\, e^{-x}$ soit une solution de E_2.

   b-Montrer que z est une solution de E_2 si et seulement si $(z - g)$ est solution de E_0 : $y' + y = 0$.

   c-Résoudre l'équation E_2 et donner une solution de E_2 telle que $z(0) = 1$.
3. Déterminer la solution f de E_1 telle que $f(0) = f'(0) = 0$.
4. Soit la fonction h définie sur P par $h(x) = (1 + x)\, e^{-x}$ et $u_n = \int_0^n h(x)\, dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   a- Montrer, sans intégration par parties, que $u_n = 2 - (2 + n)\, e^{-n}$.

   b- Déterminer $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n$.

Exercice n°06:

1. Soit l'équation différentielle (E) : $y + y^3 = -y'$.

   On pose $z = \frac{1}{y^2}$.

   a- Montrer que : $z' = 2z + 2$.

   b- En déduire que $y(x) = \frac{1}{\sqrt{k\,e^{2x} - 1}}$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]-\ln\sqrt{k}, +\infty[$.
2. Soit la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$.

   a- Vérifier que f est une solution de (E).

   b- Dresser alors le tableau de variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$.
3. a- Montrer que f est bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

   b- Montrer que $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
4. Soit la fonction h définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $h(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x)$.

   a- Montrer que h est bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$.

   b- Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(h^{-1})'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

   c- Pour tout $\lambda > \ln\sqrt{2}$ on désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droite d'équations respectives $x = \ln\sqrt{2}$, $x = \lambda$ et $y = 0$. Montrer que $\lim_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{\pi}{4}$.

Bon travail