REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION		LYCEE SECONDAIRE KALAAT SINAN
- DEVOIR DE CONTROLE N°3 - EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : 2h	SECTION : MATHEMATIQUES Mr : Hamadi Med Ali

NB : Le plan est rapporté à un repère Orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice n° 01 **3 points** QCM: Choisir la réponse exacte (*sans justification*):

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 45$. Alors :a) $n \equiv 0 \pmod 9$ b) $n \equiv 0 \pmod 5$ c) $n \equiv 0 \pmod 7$.
2. Le reste modulo 7 de 32^{2012} est : a) 0. b) 1. c) 2.
3. $\lim_{x \mapsto +\infty} x^{2012} - e^x$. est égale à : a) $+\infty$. b) $-\infty$. c) 0.
4. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt$ est égale à : a) $\frac{1}{6}$. b) $\frac{1}{1+e}$. c) $\ln\frac{3}{2}$.

Exercice n°02 **5 points** Soit l'équation (E) : $11x - 40y = 18$.

1. a- Affirmer que (E) admet des solutions dans Z×Z.
   b- Résoudre dans Z×Z l'équation (E), sachant que $(-2, -1)$ est une solution particulière.
2. Soit $n \in$ Z. Montrer que n est solution de (S) : $\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 5 \\ n \equiv 2 \pmod 8 \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv 26 \pmod{40}$.
3. Soit le couple d'entiers (a, b) solution de (E) et $d = a \wedge b$.
   a- Donner les valeurs possibles de d.
   b- Résoudre dans Z×Z l'équation : $11a - 40b = 18$ sachant que $d = 2$.
4. Une comète A passe tous les cinq ans a été observée l'année dernière. Une comète B passe tous les huit ans et a été observée il y a deux ans. Une comète C passe tous les onze ans et a été observée il y a huit ans. Quelle est la prochaine fois où on pourra observer ces trois comètes la même année ?

Exercice n°03 **5 points** Dans un atelier de couture on sait que 20% des machines sont sous garantie.
Parmi les machines garantie 1% sont défectueuses. Parmi les machines qui ne sont pas sous garantie 10% sont défectueuses.
On considère les évènements suivants : G :« La machine est sous garantie» et D:« La machine est défectueuse ».
On choisi une machine au hasard.

1. Dessiner un arbre de choix.
2. Déterminer la probabilité pour que la machine soit sous garantie et défectueuse.
3. Déterminer la probabilité pour que la machine soit défectueuse.
4. On voit que la machine est défectueuse, quelle est la probabilité pour qu'elle soit sous garantie.
5. On choisi successivement et avec remise cinq machines. Calculer la probabilité des évènements :
   A : « Obtenir au moins deux machines sous garantie».
   B : « Seule la deuxième machine est sous garantie».
   C :« La machine sous garantie apparait pour la première fois au troisième choix».

Exercice n°04 **7 points** Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$ et (C) sa courbe représentative.

1. a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   b- Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C).
2. Soit la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{1+\ln^2 x} e^{-\sqrt{t-1}}\,dt$.
   a- Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \frac{2\ln x}{x} e^{-|\ln x|}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   b- Calculer F(1) et montrer que $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   c- Calculer $F(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
3. Calculer les intégrales suivantes : $A = \int_1^2 e^{-\sqrt{t-1}}\,dt$ et $B = \int_2^5 e^{-\sqrt{t-1}}\,dt$.
4. Pour tout $\alpha \geq 1$, on désigne par $S(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 1$, $x = \alpha$ et $y = 0$.
   a- Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$.
   b- Calculer $S(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \mapsto +\infty} S(\alpha)$.

Bon travail