Exercice N°1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

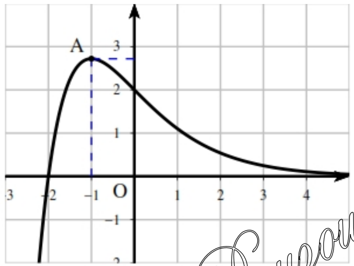
1) Pourquoi les droites d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

Exercice N°2

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels.



1) À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminer a et b.
2) Calculer $f'(x)$. En déduire les coordonnées du point A maximum de f

Exercice N°3

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1) Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ et $f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$
2) Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Démontrer que f est impaire.
4) Étudier les variation de f sur $[0, +\infty[$.
5) Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice N°4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Donner, suivant la valeur du nombre réel a fixé, le nombre de solution de l'équation : $f(x) = a$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ admet une unique solution positive u_n.
4. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1, u_2, et u_3.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$. Déterminer alor lim

Exercice N°5

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 e^x - 1$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$. On dressera le tableau de variation.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   c) Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}
   d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2) **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice N°6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x}{e^x}$.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4) Déterminer la dérivée de la fonction f.
5) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Exercice °7

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

1) Dans un repère orthonormal, construire la courbe Γ d'équation $y = e^x$ et la droite d tangente à Γ en $x = 0$.
2) Justifier graphiquement que, pour tout réel u : $e^u \geqslant u + 1$
3) En déduire que pour tout réel x : $e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$ et $1 + (x - 1)e^x \geqslant 0$
4) Démontrer alors que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice N°8

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $e^x-x>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

On appelle C représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0\,;\vec{i},\vec{j})$.

On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x)\in[0\,;1]$.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x$.
   a) Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.
   b) Étudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;1]$.
3. Dans un repère orthonormé, représenter la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

Solution Exercice N°1

1) On étudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a) En $+\infty$. On a une forme indéterminée, on change donc la forme de la fonction :

$$f(x)=\frac{e^x\left(2-\dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\frac{2-\dfrac{3}{e^x}}{1+\dfrac{1}{e^x}}$$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

Par quotient, on a donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d en $+\infty$ d'équation $y=2$.

b) En $-\infty$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty}2e^x-3=-3\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x+1=1\end{array}\right\}\ \text{Par quotient, on a } \lim_{x\to-\infty}f(x)=-3$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale Δ en $-\infty$ d'équation $y=-3$.

2) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2}\\&=\frac{e^x(2x^x+2-2e^x+3)}{(e^x+1)^2}\\&=\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}\end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

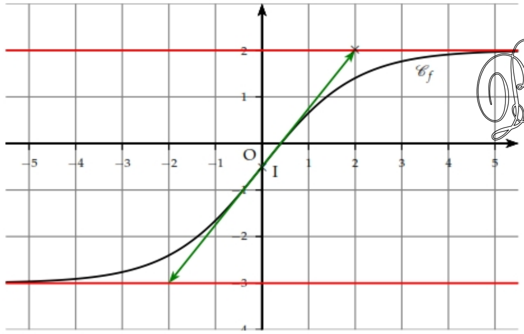
3) On a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-3 ↗	2

4) Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, il est important de placer un point et sa tangente. Par exemple le point I d'abscisse nul. On a :

$$f(0)=-\frac{1}{2}\qquad f'(0)=\frac{5}{4}$$

On obtient la courbe suivante :



5) La courbe semble symétrique par rapport au point I. Pour le démontrer, prenons un nouveau repère centré en I. Un point $M(x,y)$ a pour coordonnées dans le nouveau repère $M(X,Y)$. On a alors :

$$\begin{cases}X=x\\ Y=y+\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=x\\ Y=f(x)+\frac{1}{2}=\dfrac{2e^X-3}{e^X+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4e^X-6+e^X+1}{2(e^X+1)}=\dfrac{5(e^X-1)}{2(e^X+1)}\end{cases}$$

Montrons que la fonction $g(X)=\dfrac{5(e^X-1)}{2(e^X+1)}$ est impaire.

On a :

$$g(-X)=\frac{5(e^{-X}-1)}{2(e^{-X}+1)}=\frac{5(1-e^X)}{2(1+e^X)}=-g(X)$$

La fonction g est impaire, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à I