Prof : Bouzouraa.Anis	*Série d'éxercices de (suites réelles)*	*Niveau : toutes les sections*

Exercice1

Soit U la suite définie sur IN par $U_n = e^{-n+1}$ pour tout entier n.

1) Montre que $0 < U_n \leq e \quad \forall n \in IN$

2) Montrer que U est une suite géométrique dont on précisera la raison q.

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice2

Soit f la fonction définie sur [0 ,ln(2)] par :f(x) =$\frac{e^x}{e^x+2}$

1) Calculer f'(x) ; f''(x)

2) Etudier f' .En déduire que$\frac{2}{9} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout x $\in$ [0,ln2]

3) Etudier f .En déduire un encadrement de f sur [0 ,ln2]

4) Soit φ(x) = f(x)-x

a- Etudier φ sur [0,ln2]

b- En déduire qu'il existe un seul réel $x_0 \in$ [0,ln2] tel que f(x_0) = x_0

c- Déterminer le signe de φ (x) sur [0, ln2]

5) Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis que :
$|f(x) - x_0| \leq \frac{1}{4}|x - x_0| \;\; \forall\, x \in [0, \ln 2]$

II°/ On considère la suite (t_n) définie par : t_0=0 et t_{n+1} =f(t_n) $\forall n \in IN$

1) Calculer t_1

2) Montrer, par récurrence que :

a) $t_n \in [0, \ln 2] \; \forall n \in IN$

b) $|t_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in IN$

3) En déduire que la suite (t_n) est convergente et calculer sa limite.

Prof : Bouzouraa.Anis	Série d'éxercices de (suites réelles)	Niveau : toutes les sections

4) Déterminer le plus petit entier n tel que $|t_n - x_0| \leq 10^{-5}$.

Exercice3

Soit U la suite définie sur IN par $U_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{n^2}{n^3+k}$

1)Calculer U_1 etU_2.

2)Montrer que $\frac{n^2}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{n^3}{n^3+1}$ $\forall n \in IN$.

3)En déduire la limite de la suite(U_n)

Exercice4

1) Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

a)Etudier les variations de f sur $[2;+\infty[$.

b)Montrer que $2 \leq f(x) \leq 2\sqrt{2}$ $\forall x \in [2; 2\sqrt{2}]$.

c)Montrer que f(x)$\leq x$ $\forall x \in [2; 2\sqrt{2}]$.

2)Soit V la suite définie sur IN par $V_0 = 2\sqrt{2}$ et $V_{n+1} = f(V_n)$ $\forall n \in IN$.

a)Montrer que $2 \leq V_n \leq 2\sqrt{2}$ $\forall n \in IN$.

b)Montrer que la suite V est décroissante.

c)Justifier que V est une suite convergente et déterminer sa limite.